

# Vannverdier og det finansielle kraftmarkedet

Harald Endresen

31. oktober 2011



Masteroppgave ved Økonomisk Institutt

Master i samfunnsøkonomisk analyse/Master of Economic Theory and  
Econometrics

UNIVERSITETET I OSLO



# VANNVERDIER OG DET FINANSIELLE KRAFTMARKEDET

Masteroppgave ved Økonomisk Institutt  
Universitetet i Oslo

—  
© Harald Endresen

2011

Vannverdier og det finansielle kraftmarkedet

Harald Endresen

<http://duo.uio.no>

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

## Sammendrag

En vannkraftprodusent som har muligheten til å regulere produksjonen ved å lagre vann i et magasin står ovenfor et dynamisk planleggingsproblem hvor å tappe vann fra magasinet i dag har en kostnad tilsvarende den høyeste verdien vannet kunne oppnådd hadde det blitt spart. I det nordiske kraftmarkedet holdes det daglig en auksjon som kalkulerer markedspriser time for time påfølgende døgn. Hvordan skal vannkraftprodusenten tilby sin produksjonskapasitet til auksjonen på en måte som sikrer effektiv ressursutnyttelse?

I den første delen setter jeg opp en planleggingsmodell for et regulerbart vannkraftverk med lineær produksjonsteknologi og begrenset produksjons- og lagringskapasitet. Deretter utforsker jeg løsningen på produsentens planleggingsproblem analytisk. I denne prosessen fremkommer det at modellens skyggepriser ikke alltid blir entydig bestemt. Dette er en viktig nyanse å kjenne til fordi en datamaskin vil kunne allokere skyggeprisene ”feil” i slike situasjoner. Viktigheten av tilstrekkelig lang planleggingshorisont blir også påpekt. Jeg gjør rede for korrekt allokering av skyggeprisene utifra en bestemt tolkning av modellens vannverdier. Videre beskriver jeg hvordan vannverdiene kan brukes til å verdsette tilgjengelig produksjonskapasitet, og til å utlede en tilbudsfunksjon. Jeg formulerer modellen på matriseform og presenterer et numerisk eksempel.

I den andre delen ser jeg på en metode for å bruke forwardprisene som observeres i det finansielle markedet til å danne seg forventninger til fremtidige priser. Jeg setter opp en modell for en ”maksimalt glatt” forwardkurve på liknings- og matriseform og utleder de nødvendige førsteordensbetingelsene. For å illustrere metoden konstruerer jeg to forwardkurver, en med og en uten sesongfunksjon. Fra kurven med sesongfunksjon estimerer jeg ukespriser flere år frem i tid. På disse ukeprisene legger jeg på et ukedagsmønster for å få en liste med døgnpriser som hensyntar sesong- og ukedagsvariasjon. På døgnprisene legger jeg på et timeprismønster for å få en prisserie på timeform som hensyntar variasjon over sesong, uke og døgnet. Eksempler presenteres underveis. Andre del avsluttes med noen kommentarer til metoden.

Jeg konkluderer at vannkraftprodusentenes største utfordring i forbindelse med å verdsette sin produksjonskapasitet ikke er hvordan modellen skal se ut, men hvordan man skal få tak i informasjonen modellen trenger. Jeg finner at å utlede prisserier fra forwardpriser trolig ikke lar seg gjennomføre på en god måte fordi kontraktene som er skrevet på områdepriser ofte er illikvide og i begrenset antall.



## Forord

Temaet for oppgaven valgte jeg fordi jeg ville lære mer om vannverdier. Boken og innspill fra min veileder Finn R. Førsund har vært til stor hjelp i denne forbindelse, og han fortjener en stor takk. Videre vil jeg takke Geir Holler, Tor Arnt Johnsen, Mads Øyvind Willumsen, Knut Gakkestad og Tore Jarlset for at de tok seg tid til å møte meg i forbindelse med oppgaven og for å ha kommet med mange nyttige kommentarer.

Eventuelle feil og mangler står helt og fullt for undertegnedes regning.

—  
Oslo, oktober 2011

Harald Endresen





# Innhold

<b>1</b>	<b>Det nordiske kraftmarkedet</b>	<b>1</b>
1.1	Kort om det fysiske kraftmarkedet . . . . .	1
1.2	Kort om det finansielle kraftmarkedet . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Modell for et regulerbart vannkraftverk</b>	<b>5</b>
2.1	Innledende kommentarer . . . . .	5
2.2	Modellen . . . . .	6
2.3	Løsning . . . . .	9
2.3.1	Årsaker til skift i vannverdiene . . . . .	11
2.3.2	Nivået på vannverdiene . . . . .	12
2.3.3	Prisregimer . . . . .	13
2.3.4	Den siste planleggingstimen . . . . .	20
2.3.5	Den første planleggingstimen . . . . .	21
2.3.6	Tilbudskurve . . . . .	22
2.4	Modellen på matriseform . . . . .	24
2.5	Et eksempel . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Forventede timepriser</b>	<b>28</b>
3.1	Innledende kommentarer . . . . .	28
3.2	Modell for glatt forwardkurve . . . . .	29
3.2.1	Beskrivelse av modellen . . . . .	29
3.2.2	Modellen på matriseform med løsningsbeskrivelse . . . . .	32
3.2.3	Eksempel glatt forwardkurve . . . . .	36
3.3	Uke- og døgnvariasjon . . . . .	39
3.4	Innvendinger mot metoden . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>46</b>
<b>5</b>	<b>Vedlegg</b>	<b>47</b>

## Tabeller

1	Mulige caser for vannverdien i et prisregime . . . . .	20
2	Resultater fra modellen . . . . .	26
3	Prisregimer, vannverdier og kommentarer . . . . .	26
4	Vannverdier og tilbudsfunksjon . . . . .	27
5	Forwardkontrakter observert den 8. august 2011 . . . . .	37
6	Cfd-kontrakter for Oslo (NO1) observert den 8. august 2011 . . . . .	43
7	Forwardpriser for Oslo (NO1) observert den 8. august 2011 . . . . .	45

## Figurer

1	Skisse av modellen . . . . .	5
2	To glatte forwardkurver med forskjellig sesongfunksjon . . . . .	38
3	Estimerte ukespriser for de første 53 ukene . . . . .	40
4	Estimerte ukedagspriser for de første 34 dagene . . . . .	41
5	Estimerte timepriser for de første 48 timene . . . . .	42

# 1 Det nordiske kraftmarkedet

## 1.1 Kort om det fysiske kraftmarkedet

Elektrisitet er en vare

- folk flest har behov for
- som ikke kan lagres (med unntak av i batterier og vannmagasiner)
- som transporteres med tap i nettverk av ledninger og kabler som har begrenset overføringskapasitet

De tre punktene ovenfor er viktige for å forstå sammensetningen av det nordiske kraftmarkedet. Siden forbruk og produksjon må skje simultant er det viktig å planlegge systemet i balanse, nærmere bestemt hvilke kraftverk som skal startes opp for å imøtekomme forventet forbruk på en effektiv måte. I Norden varierer forbruket vesentlig over sesong og ethvert land må sørge for å ha tilstrekkelig produksjons- og reservekapasitet til å balansere forbruket selv når det settes kulderekord. Mulighet for handel over landegrensene tillater forskjellige teknologier å komplementere hverandre, noe som letter behovet for kostbar reservekapasitet.

Det fysiske kraftmarkedet består av

- primærmarkedet Elspot
- sekundærmarkedet Elbas
- nasjonale regulerkraftmarkeder

Elspot er en auksjon som holdes hver dag kl. 12 ved kraftbørsen Nord Pool Spot. Til auksjonen innmeldes handelskapasiteter og områdespesifikke tilbuds- og etterspørselskurver for hver time, midnatt til midnatt påfølgende døgn. På grunnlag av informasjonen som innmeldes kalkulerer børsen likevektspriser for hvert prisområde alle timer neste døgn. Kraftflyt mellom områdene muliggjøres av handelskapasitetene som meldes inn og bestemmes implisitt av prisberegningene. Hvis all handelskapasitet mellom to prisområder utnyttes maksimalt heter det seg at det har oppstått en flaskehals, og prisene mellom de to områdene blir som et resultat forskjellige fra hverandre. Aktørene som deltar på markedet mottar prisen i området de forbruker eller produserer og børsen organiserer og garanterer oppgjør for handelen.

I tillegg til områdeprisene beregner Nord Pool Spot teoretiske systempriser for alle timer påfølgende døgn. I systemprisberegningene legges det til grunn de samme buddataene som for områdeprisene, men handelskapasitetene mellom områdene blir satt uendelig store slik at kraften kan flyte fritt i systemet. Prisene som balanserer den totale etterspørselen med det totale tilbudet for hver time påfølgende døgn er systemprisene. Systemprisene tjener ingen betalingsfunksjon i det fysiske markedet men spiller en viktig rolle som underliggende pris for forwardkontrakter listet i det finansielle markedet. Jeg kommer tilbake til dette i seksjon 1.2.

Sekundærmarkedet Elbas tilrettelegges også av Nord Pool Spot og åpner for handel i Elspot-kontraktene for morgendagen rundt kl. 14 hver dag. Kontraktene i Elbas kan handles helt frem til en time (to i Norge) før den skal til levering. Såfremt det er tilgjengelig handelskapasitet er det mulig for aktører i forskjellige områder å handle med hverandre. Elbas utgjør et viktig ledd i planleggingsprosessen mot selve driftstimen siden den tilbyr en arena for aktørene til å komme seg ut av kontraktforpliktelser fra Elspot som ikke kan etterleves på grunn av uforutsette utfall av kapasitet. På denne måten minsker mulighetene for store ubalanser mellom planlagt og faktisk kraftbalanse i selve driftstimen.<sup>1</sup>

Hvert land har sin egen systemoperatør som er blitt tildelt ansvaret å drifte kraftnettet og sørge for sikker kraftforsyning. Systemoperatørene i de nordiske landene er Statnett i Norge, Svanska Kraftnät i Sverige, Energinet.dk i Danmark og Fingrid i Finland. Systemoperatørene utfører en rekke oppgaver og jeg skal bare nevne noen her. Det er systemoperatørene bestemmer hvor mye handelskapasitet som kan gis til Elspot og Elbas. Handelskapasitetene mellom prisområdene settes så store som mulig hensyntatt fysiske begrensninger i det underliggende strømmettet. For å ha kontroll med at systemet er i balanse til enhver tid tilrettelegger hver systemoperatør et regulerkraftmarked hvor de kjøper reguleringskraft for å eliminere eventuelle ubalanser mellom produksjon og forbruk i realtid. I regulerkraftmarkedet kan produsenter og forbrukere som er i stand til å endre produksjon/forbruk på kort varsel (inntil 15 minutter) tilby regulering opp eller ned. Systemoperatøren vurderer behovet for opp- eller nedregulering og velger de beste tilbudene dersom regulering er nødvendig.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Mer informasjon om Elspot og Elbas finnes på <http://www.npspot.com/>

<sup>2</sup>For mer informasjon om en systemoperatørs virksomhet se for eksempel <http://www.statnett.no/>

## 1.2 Kort om det finansielle kraftmarkedet

På råvarebørsen NASDAQ OMX Commodities listes finansielle kontrakter som er skrevet på priser fra det fysiske kraftmarkedet. Slike kontrakter gis gjerne fellesbetegnelsen kraftderivater siden de utleder sin verdi fra underliggende kraftpriser. Det finansielle markedet gjør det mulig for markedsaktører å bytte ut Elspot-priser med forhåndsavtalte fastpriser for ulike terminer så langt som seks år frem i tid. De vanligste kraftderivatene er forwards/futures og Cfd-kontrakter (Contracts for difference).

En futures- eller forwardkontrakt i kraftmarkedet (begge omtales heretter som forwards<sup>3</sup>) er en standardisert avtale mellom en kjøper og en selger om å bytte en spotpris med en forhåndsavtalt fastpris for et volum på 1 MW kraft levert kontinuerlig over en gitt periode i fremtiden (leveringsperioden). Hvis den gjennomsnittlige spotprisen over leveringsperioden blir lavere enn den forhåndsavtalte fastprisen betaler kjøperen av forwardkontrakten selgeren differansen. Tilsvarende, hvis gjennomsnittlig spotpris blir høyere enn fastprisen betaler selgeren av forwardkontrakten kjøperen differansen. Oppgjøret mellom kjøper og selger skjer på daglig basis gjennom kontraktens leveringsperiode.

Forwardkontraktene er skrevet på den teoretiske systemprisen. Selv om systemprisen er høyt korrelert med de fleste områdeprisene kan det i perioder oppstå vesentlige avvik mellom en områdepris og systemprisen, noe som gjør det risikabelt og derfor noe feilslått å bruke systemprisforwards til prissikring. For å gi fysiske aktører muligheten til å sikre områdepriser listes Cfd-kontrakter for de fleste prisområder. En Cfd-kontrakt er en standardisert avtale mellom en kjøper og en selger om å bytte differansen mellom en områdepris og systemprisen med en forhåndsavtalt fast differanse for et volum på 1 MW levert kontinuerlig over en leveringsperiode. Hvis den gjennomsnittlige differansen mellom områdeprisen og systemprisen blir lavere enn den forhåndsavtalte differansen betaler kjøperen av Cfd-kontrakten selgeren mellomlegget. Tilsvarende, hvis gjennomsnittlig differanse blir høyere enn den faste differansen betaler selgeren kjøperen mellomlegget. Oppgjøret mellom kjøper og selger skjer på daglig basis gjennom kontraktens leveringsperiode.

Cfd- og forwardkontrakter virker altså på samme måte, og eneste forskjell mellom

---

<sup>3</sup>Futures er forskjellige fra forwards gjennom at de har daglig oppgjør i handelsperioden, mens forwards gjøres opp først når kontrakten går til levering. For alle formål i denne oppgaven kan futures og forwards sees på som det samme.

de to er at forwarden er skrevet på systemprisen mens Cfd-kontrakten er skrevet på differansen mellom en områdepris og systemprisen.

Å inngå en forwardkontrakt og en Cfd-kontrakt (enten kjøpe begge eller selge begge) med samme leveringsperiode er det samme som å inngå en forwardkontrakt som er skrevet på områdeprisen for Cfd-kontrakten. Dette er fordi systemprisen som ligger under forwardkontrakten alltid vil utliknes av systemprisen som inngår i differansen som ligger under Cfd-kontrakten. For å illustrere dette, sett jeg at inngår en forward med underliggende systempris  $p$  og en Cfd med samme termin og underliggende pris  $q - p$ , hvor  $q$  er en områdepris. Siden kontraktene har lik leveringsperiode og like volum kan de underliggende prisene summeres slik at den totale underliggende prisen blir  $p + (q - p) = q$ , altså områdeprisen. En kombinasjon av Cfd- og forwardkontrakter muliggjør dermed perfekt prissikring av områdepriser. For å støtte under om dette avsluttes denne seksjonen med et eksempel om prissikring.

Sett at en produsent i Finland vil sikre en salgspris på 100 MW kontinuerlig kraftproduksjon i perioden første kvartal 2012. Produsenten selger derfor 100 kontrakter av typen ENOQ1-12 (forward) og 100 kontrakter av typen SYHELQ1-12 (Cfd for prisområdet Finland). Sett at markedsprisene produsenten oppnådde var 50 €/MWh per forwardkontrakt og -3 €/MWh per Cfd-kontrakt. Fastprisen per kontrakt skrevet på områdeprisen i Finland blir derfor 47 EUR/MWh. Første kvartal 2012 løper over 2204 timer. Hvis den finske områdeprisen skrives  $p_t$  for en time  $t$  i løpet av leveringsperioden  $\Psi$ , kan sluttverdien på kontraktposisjonen i € uttrykkes med

$$\left[47 - \frac{\sum_{t \in \Psi} p_t}{2204}\right] \cdot 2204 \cdot 100$$

Sluttverdien på kontraktposisjonen avhenger altså utelukkende av den realiserte gjennomsnittsprisen i Finland for første kvartal 2012. Hvis produsenten selger 100 MW i Elspot og mottar områdeprisen i Finland hver time i første kvartal 2012 vil det generere inntekter i € lik

$$\sum_{t \in \Psi} p_t \cdot 100$$

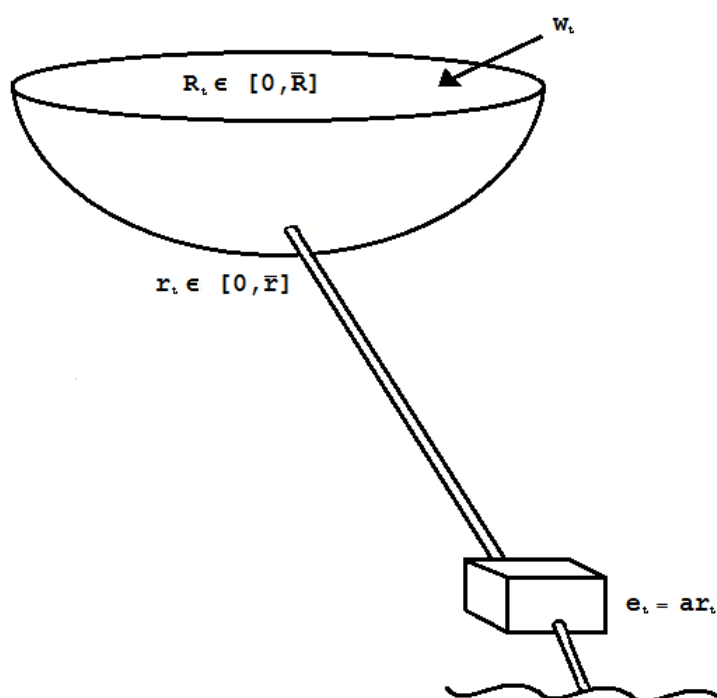
Produsentens samlede inntekt fra kontraktposisjonen og kraftsalg for første kvartal 2012 blir

$$\left[47 - \frac{\sum_{t \in \Psi} p_t}{2204}\right] \cdot 2204 \cdot 100 + \sum_{t \in \Psi} p_t \cdot 100 = 47 \cdot 2204 \cdot 100$$

Produsenten oppnår prisen 47 €/MWh i alle 2204 timer for volumet 100 MW uavhengig av hva spotprisene i Finland blir. Grunnen til at det blir slik er at eventuelle tap (gevinster) i spotmarkedet motsvares fullstendig av gevinst (tap) på kontraktposisjonen.

## 2 Modell for et regulerbart vannkraftverk

### 2.1 Innledende kommentarer



Figur 1: Skisse av modellen

Modellen jeg skal bruke i dette avsnittet har jeg fra det siste kapittelet i Førsumd (2007).

Kraftverket jeg ønsker å modellere er skissert i Figur 1. På en viss høyde ligger et magasin som rommer et gitt volum vann. Magasinet er tilknyttet en kraftstasjon lengre ned i systemet via et rør. Kraftstasjonen genererer elektrisitet ved at vann fra magasinet tappes ned til stasjonen hvor det føres gjennom en turbin som driver en generator. Vann som har vært gjennom turbinen føres deretter ut i havet eller

en fjord gjennom et nytt rør.<sup>4</sup> Magasinet fylles over tid ved nedbør, snøsmelting og ved at vann fra omkringliggende (høyere) områder føres til magasinet.

Produsenten som driver kraftverket selger sin produksjon i et marked med fri konkurranse som klareres på timebasis en time frem i tid. For å anslå verdien av den tilgjengelige produksjonskapasiteten i neste time må produsenten planlegge den inntektsmaksimerende bruken av vannet han har, og forventer å få. I denne forbindelse skal jeg anta at produsenten

- planlegger et gitt antall timer frem i tid
- kjenner magasinbeholdningen på nåværende tidspunkt
- disponerer et kraftverk med lineær produktfunksjon
- tar forventet tilsig for gitt i planleggingen
- tar forventede priser (alle større enn 0) for gitt i planleggingen
- ser bort ifra diskontering
- har ingen driftsavhengige kostnader<sup>5</sup>

Resten av kapittelet er strukturert som følger: Seksjon 2.2 beskriver modellen i detalj og redegjør for produsentens planleggingsproblem i time 0; seksjon 2.3 analyserer løsningen på planleggingsproblemet og utleder produsentens tilbudsfunksjon for time 1; seksjon 2.4 gjør rede for modellen på matriseform; seksjon 2.5 presenterer et numerisk eksempel.

## 2.2 Modellen

Siden spotmarkedet klareres time for time planlegger produsenten sin produksjon time for time. Jeg antar at produsenten planlegger  $T$  timer frem i tid.

For en time  $t \in \{1, \dots, T\}$  representerer variabelen

- $r_t$  tapping av vann fra magasinet i time  $t$ . Måleenheten er kubikkmeter vann

---

<sup>4</sup>Jeg sier bevisst hav eller fjord - istedet for f.eks lakseelv - for å unngå kompliserende restriksjoner som minstevannsførings- eller rampingrestriksjoner.

<sup>5</sup>Denne antagelsen gjøres for å rendyrke fokuset på alternativkostnaden forbundet med produksjon.



- $e_t$  elektrisitetsproduksjon i time  $t$ . Måleenheten er megawatttimer (MWh)
- $R_t$  magasinbeholdning ved utgangen av time  $t$ . Måleenheten er kubikkmeter vann

I alt har modellen  $3T$  variable. Variablene for tapping og elektrisitetsproduksjon er *strømmningsvariable* fordi de gjengir summen av noe som pågår i løpet av time  $t$ . Variablene for magasinbeholdningen er *beholdningsvariable* fordi de gir en beholdningsverdi på tidspunktet "utgangen av time  $t$ ".

Vannstanden i magasinet er regulert av myndighetene til å ligge innenfor en øvre og en nedre grense målt i meter over havet. I modellen oversettes disse reguleringene til en restriksjon på magasinbeholdningen

$$R_t \in [\underline{R}, \overline{R}] \quad t \in \{1, \dots, T\} \quad (1)$$

Betingelsen sier at magasinbeholdningen ikke kan være mindre enn  $\underline{R}$  og ikke større enn  $\overline{R}$  kubikkmeter vann. Siden det sparer plass og ikke medfører tap av generalitet setter jeg  $\underline{R} = 0$  heretter.

Ved inngangen til planleggingsperioden er magasinbeholdningen  $R_0$ . I løpet av planleggingsperioden fylles magasinet ved nedbør, snøsmelting og tilført vann fra omkringliggende elver og vassdrag. Avhengig av temperaturen vil noe vann fordampe og dermed ta vann ut av magasinet. I modellen er alt dette fanget opp i størrelsen  $w_t$  som tolkes som tilsiget til magasinet i kubikkmeter vann som produsenten forventer i time  $t$ . Endringen i magasinbeholdningen i en time beskrives av betingelsen

$$R_t - R_{t-1} \leq w_t - r_t \quad t \in \{1, \dots, T\} \quad (2)$$

Betingelsen sier at endringen i magasinbeholdningen i time  $t$  må være mindre eller lik netto tilførsel av vann til magasinet i time  $t$ . Ulikheten gjør seg bare gjeldende hvis magasinet opplever overløp i time  $t$  hvilket betyr at vann renner over kanten av magasinet i time  $t$

$$R_{t-1} + w_t - r_t > R_t \quad \text{og} \quad R_t = \overline{R}$$

Her er summen av magasinbeholdningen ved inngangen til time  $t$  og netto tilførsel av vann i time  $t$  er større enn magasinkapasiteten. I en slik situasjon vil et positivt kvantum på  $R_{t-1} + w_t - r_t - \overline{R}$  kubikkmeter vann renne ut av magasinet, og magasinet vil følgelig måtte være fullt ved utgangen av time  $t$ . Produsenten vil etter beste evne

forsøke å unngå timer med overløp siden vann som renner ut av magasinet ikke kan brukes til elektrisitetsproduksjon og dermed ikke generere inntekter.

Turbinens slukekapasitet  $\bar{r}$  setter en øvre grense for antall kubikkmeter vann per sekund som kan tappes fra magasinet ned til kraftstasjonen. Videre kan det ikke tappes negative kvantum vann på grunn av tyngdekraften. Til sammen må derfor tapping fra magasinet oppfylle

$$r_t \in [0, \bar{r}] \quad t \in \{1, \dots, T\} \quad (3)$$

Betingelsen sier at tappingen fra magasinet i time  $t$  kan aldri være mindre enn 0 eller større enn slukekapasiteten  $\bar{r}$ . I praksis kunne det være ønskelig å gjøre slukekapasiteten tidsavhengig, for eksempel for å hensynta perioder med planlagt vedlikehold på turbinen. Dette kan inkluderes i modellen uten prinsipielle endringer i oppsettet.

Produktfunksjonen beskriver sammenhengen mellom tapping fra magasinet og elektrisitetsproduksjon og modelleres som en lineær funksjon

$$e_t = ar_t \quad t \in \{1, \dots, T\} \quad (4)$$

Her er  $a$  er en konstant energikoeffisient som forteller hvor mange MWh energi som produseres ved å tappe en kubikkmeter vann gjennom turbinen i kraftstasjonen. Energikoeffisientens størrelse avhenger av hvor effektivt kraftverket kan utnytte den kinetiske energien i det akselererte vannet hensyntatt tap i rør, turbin, generator og høyde fra vannflaten i magasinet ned til turbinen. Å legge til grunn en konstant energikoeffisient er en forenkling av virkeligheten. I praksis vil  $a$  kunne variere med både tapperate og magasinbeholdning. Dersom variasjonen i  $a$  er stor for tillatte verdier av  $r_t$  og  $R_t$ , bør nok  $a$  heller modelleres som en funksjon av tappingen i time  $t$  og magasinbeholdningen ved inngangen til time  $t$  for å få en mer virkelighetsnær produktfunksjon.

Elektrisitetsprisen som produsenten forventer i time  $t$  representeres med  $p_t$  og har måleenhet €/MWh.

Innenfor rammene beskrevet av betingelsene (1) – (4) og de gitte tilsigs- og prisforventningene søker produsenten å planlegge driften av kraftverket på en slik måte

at inntektene fra kraftsalg blir maksimert. Matematisk kan produsentens planleggingsproblem uttrykkes med

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{t=1}^T p_t e_t \\
& \text{gitt at} \\
& e_t = a r_t \\
& R_t - R_{t-1} \leq w_t - r_t \\
& R_t \in [0, \overline{R}] \\
& r_t \in [0, \bar{r}_t] \\
& R_0, w_t, p_t, \overline{R}, a \text{ og } \bar{r} \text{ gitt} \\
& R_T \text{ fri} \\
& t = 1 \dots, T
\end{aligned} \tag{5}$$

Planleggingsproblemet sier at det skal velges tillatte verdier for tapping, elektrisitetssproduksjon og magasinbeholdning for hver time i planleggingsperioden slik at forventede totale salgsinntekter maksimeres.

## 2.3 Løsning

Det første man kan merke seg når man skal forsøke å løse problemet i (5) er at variablene  $e_t$  og  $r_t$  er "to sider av samme sak" siden  $e_t = a r_t$ . Enten  $r_t$  eller  $e_t$  kan derfor elimineres fra maksimeringsproblemet. Jeg eliminerer  $e_t$  ved å bytte ut alle  $e_t$  med  $a r_t$ , vel vitende at en kubikkmeter tapping vil alltid vil generere  $a$  MWh energi. Det omformulerte maksimeringsproblemet kan uttrykkes med

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{t=1}^T p_t a r_t \\
& \text{gitt at} \\
& R_t - R_{t-1} \leq w_t - r_t \\
& R_t \in [0, \overline{R}] \\
& r_t \in [0, \bar{r}_t] \\
& R_0, w_t, p_t, \overline{R}, a \text{ og } \bar{r} \text{ gitt} \\
& R_T \text{ fri} \\
& t = 1 \dots, T
\end{aligned} \tag{6}$$

Det omformulerte problemet har  $2T$  variabler  $r_t$  og  $R_t$  og alt måles i kubikkmeter vann. Uttrykket  $p_t a$  kan tolkes som markedsprisen på å tappe vann til elektrisitetssalg i time  $t$  og har måleenhet € per kubikkmeter vann. Jeg skal heretter omtale  $p_t a$  som prisen i time  $t$ .

Ved å tilordne betingelsene i (2) skyggepriser  $\lambda_1, \dots, \lambda_T$ , betingelsene på magasin-kapasiteten i (1) skyggepriser  $\gamma_1, \dots, \gamma_T$ , og betingelsene på slukekapasiteten i (3) skyggepriser  $\theta_1, \dots, \theta_T$ , kan Lagrange-funksjonen for problemet i (6) uttrykkes med

$$\begin{aligned}
L = & \sum_{t=1}^T p_t a r_t \\
& - \sum_{t=1}^T \lambda_t [R_t - R_{t-1} - w_t + r_t] \\
& - \sum_{t=1}^T \gamma_t [R_t - \bar{R}] \\
& - \sum_{t=1}^T \theta_t [r_t - \bar{r}]
\end{aligned} \tag{7}$$

En eventuell løsning på maksimeringsproblemet i (6) tilfredsstiller nødvendige betingelser gitt ved<sup>6</sup>

$$\frac{\partial L}{\partial r_t} = p_t a - \lambda_t - \theta_t \leq 0 \quad (= 0 \text{ for } r_t > 0) \tag{8a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial R_t} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} - \gamma_t \leq 0 \quad (= 0 \text{ for } R_t > 0) \tag{8b}$$

$$\lambda_t \geq 0 \quad (= 0 \text{ for } R_t < R_{t-1} + w_t - r_t) \tag{8c}$$

$$\gamma_t \geq 0 \quad (= 0 \text{ for } R_t < \bar{R}) \tag{8d}$$

$$\theta_t \geq 0 \quad (= 0 \text{ for } r_t < \bar{r}) \tag{8e}$$

Problemet i (6) er lineært programmeringsproblem og det er formulert på en måte som forsikrer en løsning fordi alle variablene er definert over et lukket intervall og ingen av betingelsene er inkonsistente for parameterverdiene som er ment skal ligge til grunn.<sup>7</sup>

---

<sup>6</sup>Se for eksempel kapittel 8 i Sydsæter et al. (2002) for mer informasjon.

<sup>7</sup>For mer informasjon, se for eksempel: [http://en.wikipedia.org/wiki/Linear\\_programming](http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_programming)

Sett at

$$\begin{aligned} r^* &= (r_1^*, \dots, r_T^*) \\ R^* &= (R_1^*, \dots, R_T^*) \\ \lambda^* &= (\lambda_1^*, \dots, \lambda_T^*) \\ \gamma^* &= (\gamma_1^*, \dots, \gamma_T^*) \\ \theta^* &= (\theta_1^*, \dots, \theta_T^*) \end{aligned}$$

maksimerer Lagrange-funksjonen i (7) slik at jeg kan være sikker på at de tilfredsstiller de nødvendige betingelsene i 8. Heretter skal jeg omtale  $r^*$  og  $R^*$  som en ”inntekstmaksimerende plan”, eller bare ”plan”. Skyggeprisene  $\lambda^*$ ,  $\theta^*$  og  $\gamma^*$  skal også få nye navn på bakgrunn av deres økonomiske tolkning.

Betingelsen i (8d) sier at skyggeprisen  $\gamma_t^*$  bare kan være positiv hvis magasin-kapasiteten er nådd i time  $t$ . Tolkningen av  $\gamma_t^*$  er at den viser verdien som en ekstra kubikkmeter magasinkapasitet i time  $t$  kunne skapt. Heretter skal jeg kalle  $\gamma_t^*$  ”magasinprisen i time  $t$ ” fordi den fremstår som en pris produsenten må betale fordi han ikke har mer magasinkapasitet i time  $t$ .

Betingelsen i (8e) sier at skyggeprisen  $\theta_t^*$  bare kan være positiv hvis slukekapasiteten er nådd i time  $t$ . Tolkningen av  $\theta_t^*$  er at den viser verdien av å tappe en ekstra kubikkmeter vann gjennom turbinen i time  $t$ . Heretter skal jeg kalle  $\theta_t^*$  ”kapasitetsprisen i time  $t$ ” fordi den fremstår som en pris produsenten må betale fordi han ikke har mer slukekapasitet i time  $t$ .

Betingelsen i (8c) sier at skyggeprisen  $\lambda_t^*$  bare kan være positiv hvis magasinet renner over i time  $t$ . Foreløpig skal jeg forstå  $\lambda_t^*$  som ”vannverdien i time  $t$ ”. Hvordan  $\lambda_t^*$  skal tolkes i denne modellen er tema for de kommende tre seksjonene.

### 2.3.1 Årsaker til skift i vannverdiene

Fra betingelsene (8b) og (8d) kan man hente ut tre viktige resultater om vannverdiene i en time  $t \in \{1, \dots, T\}$ .

Hvis planen legger opp til at magasinet hverken er fullt eller tomt ved utgangen av time  $t$  slik at  $R_t^* \in (0, \bar{R})$  sier betingelsen i (8b) at  $\lambda_t^* = \lambda_{t+1}^* - \gamma_t^*$  siden  $R_t^* > 0$ .

Videre sier betingelsen i (8d) at  $\gamma_t^* = 0$  siden  $R_t^* < \bar{R}$ . Når dette settes sammen får man resultatet

$$\text{Hvis } R_t^* \in (0, \bar{R}) \text{ så er } \lambda_t^* = \lambda_{t+1}^* \quad (9)$$

Resultatet sier at hvis magasinet hverken er fullt eller tomt ved utgangen av time  $t$  så er vannverdien i time  $t$  lik vannverdien i time  $t + 1$ .

Hvis planen legger opp til at magasinet er fullt ved utgangen av time  $t$  slik at  $R_t^* = \bar{R}$  sier betingelsen i (8b) at  $\lambda_t^* = \lambda_{t+1}^* - \gamma_t^*$  siden  $R_t^* > 0$ . Videre sier betingelsen i (8d) at  $\gamma_t \geq 0$  siden  $R_t^* = \bar{R}$ . Når dette settes sammen får man resultatet

$$\text{Hvis } R_t^* = \bar{R} \text{ så er } \lambda_t^* \leq \lambda_{t+1}^* \quad (10)$$

Resultatet sier at hvis magasinet er fullt ved utgangen av time  $t$  så er vannverdien i time  $t$  mindre eller lik vannverdien i time  $t + 1$ .

Hvis planen legger opp til at magasinet er tomt ved utgangen av time  $t$  slik at  $R_t^* = 0$  sier betingelsen i (8b) at  $\lambda_t^* \geq \lambda_{t+1}^* - \gamma_t^*$  siden  $R_t^* \not> 0$ . Videre sier betingelsen i (8d) at  $\gamma_t^* = 0$  siden  $R_t^* < \bar{R}$ . Når dette settes sammen får man resultatet

$$\text{Hvis } R_t^* = 0 \text{ så er } \lambda_t^* \geq \lambda_{t+1}^* \quad (11)$$

Resultatet sier at hvis magasinet er tomt ved utgangen av time  $t$  så er vannverdien i time  $t$  større eller lik vannverdien i time  $t + 1$ .

Fra de tre resultatene kan jeg konkludere at vannverdien i time  $t$  bare kan være ulik vannverdien i time  $t + 1$  hvis magasinet er enten fullt eller tomt ved utgangen av time  $t$ .

### 2.3.2 Nivået på vannverdiene

Fra betingelsene (8a) og (8e) kan man hente ut tre viktige resultater om vannverdiene i en time  $t \in \{1, \dots, T\}$ .

Hvis planen legger opp til at tappingen hverken er minimal ( $r_t^* = 0$ ) eller maksimal ( $r_t^* = \bar{r}$ ) i time  $t$  slik at  $r_t^* \in (0, \bar{r})$  så sier betingelsen i (8a) at  $p_t a = \lambda_t^* + \theta_t^*$  fordi  $r_t^* > 0$ . Videre sier betingelsen i (8e) at  $\theta_t^* = 0$  siden  $r_t^* < \bar{r}$ . Når dette settes

sammen får man resultatet

$$\text{Hvis } r_t^* \in (0, \bar{r}) \text{ så er } \lambda_t^* = p_t a \quad (12)$$

Resultatet sier at hvis den planlagte tappingen hverken er minimal eller maksimal i time  $t$  så er vannverdien i time  $t$  lik prisen i time  $t$ .

Hvis planen legger opp til maksimal tapping i time  $t$  slik at  $r_t^* = \bar{r}$  så sier betingelsen i (8a) at  $p_t a = \lambda_t^* + \theta_t^*$  fordi  $r_t^* > 0$ . Videre sier betingelsen i (8e) at  $\theta_t^* \geq 0$  siden  $r_t^* = \bar{r}$ . Når dette settes sammen får man resultatet

$$\text{Hvis } r_t^* = \bar{r} \text{ så er } \lambda_t^* \leq p_t a \quad (13)$$

Resultatet sier at hvis den planlagte tappingen er maksimal i time  $t$  så er vannverdien i time  $t$  mindre eller lik prisen i time  $t$ .

Hvis planen legger opp til minimal tapping i time  $t$  slik at  $r_t^* = 0$  så sier betingelsen i (8a) at  $p_t a \leq \lambda_t^* + \theta_t^*$  fordi  $r_t^* \not> 0$ . Videre sier betingelsen i (8e) at  $\theta_t^* = 0$  siden  $r_t^* < \bar{r}$ . Når dette settes sammen får man resultatet

$$\text{Hvis } r_t^* = 0 \text{ så er } \lambda_t^* \geq p_t a \quad (14)$$

Resultatet sier at hvis den planlagte tappingen er minimal i time  $t$  så er vannverdien i time  $t$  større eller lik prisen i time  $t$ .

Fra disse resultatene kan jeg konkludere at vannverdien i time  $t$  bare kan være ulik prisen i time  $t$  hvis tappingen er enten minimal eller maksimal i time  $t$ .

### 2.3.3 Prisregimer

Sett at time  $s$  og time  $s + k$  representerer to timer innenfor planleggingsperioden hvor magasinet enten er fullt eller tomt, og at eventuelle timer mellom disse er timer hvor magasinet hverken er fullt eller tomt.<sup>8</sup> Fra resultatene i avsnitt 2.3.1 følger det at

$$\lambda_s^* \leq \lambda_{s+1}^* = \dots = \lambda_{s+k}^* \leq \lambda_{s+k+1}^* \quad (15)$$

De  $k \geq 1$  timene fra time  $s + 1$  til time  $s + k$  har lik vannverdi og kan sies å tilhøre samme prisregime. En hvilken som helst vannverdi for timene fra  $s + 1$  til  $s + k$  kan

---

<sup>8</sup>Man må ha  $k > 1$  hvis det skal være timer i mellom.

derfor uttrykkes med

$$\lambda_{s+1}^{s+k} \equiv \lambda_{s+1}^* = \dots = \lambda_{s+k}^*$$

Her tolkes  $\lambda_{s+1}^{s+k}$  som vannverdien i prisregimet fra time  $s+1$  til  $s+k$ . Nå som jeg vet dette kan jeg utvide min forståelse av  $\lambda_t^*$ , hvor  $t \in \{s+1, \dots, s+k\}$ , fra vannverdien i time  $t$  til vannverdien i prisregimet fra time  $s+1$  til  $s+k$ . Heretter refererer altså ordet "vannverdi" til  $\lambda_{s+1}^{s+k}$ . I det som følger skal jeg se nærmere på hvordan vannverdien i et prisregime bestemmes i modellen.

Sett at man betrakter et prisregime fra time  $s+1$  til  $s+k$ . Av (12) og (13) vet jeg at alle timene i prisregimet hvor det tappes positive mengder vann har priser som tilfredsstillers  $p_t a \geq \lambda_{s+1}^{s+k}$ . Av dette følger det at vannverdien må være mindre eller lik den *minste* prisen av prisene i timene hvor det er positiv tapping. Fra dette kan jeg konkludere at hvis prisregimet har minst en time hvor tappingen er positiv så er

$$\lambda_{s+1}^{s+k} \leq \lambda^{max} \equiv a \min\{p_t \in \{p_{s+1}, \dots, p_{s+k}\} : r_t^* \neq 0\} \quad (16)$$

Her er  $\lambda^{max}$  den laveste prisen i timene hvor det tappes positivt. I de tilfellene hvor  $\lambda^{max}$  eksisterer setter den en *øvre grense* for hvor stor  $\lambda_{s+1}^{s+k}$  kan være.

Fra (12) og (14) følger det at alle timer i prisregimet hvor det ikke tappes maksimalt tilfredsstillers  $p_t a \leq \lambda_{s+1}^{s+k}$ . Fra dette må det også holde at vannverdien er større eller lik den *største* prisen av prisene i timene hvor det ikke tappes maksimalt. Fra dette kan jeg konkludere at hvis prisregimet har minst en time hvor tappingen ikke er maksimal så er

$$\lambda_{s+1}^{s+k} \geq \lambda^{min} \equiv a \max\{p_t \in \{p_{s+1}, \dots, p_{s+k}\} : r_t^* \neq \bar{r}\} \quad (17)$$

Her er  $\lambda^{min}$  den høyeste prisen i timene som ikke tapper maksimalt. I de tilfellene hvor  $\lambda^{min}$  eksisterer setter den en *nedre grense* for hvor liten  $\lambda_{s+1}^{s+k}$  kan være. Hvis alle timer i prisregimet er slik at  $r_t^* = \bar{r}$  slik at  $\lambda^{min}$  ikke eksisterer så er 0 den nedre grensen for hvor liten  $\lambda_{s+1}^{s+k}$  kan være.

Ved å betrakte en inntektsmaksimerende plan for timene i et prisregime kan man si en del om vannverdien for prisregimet. De forskjellige prisregimene en kan støte på i modellen er beskrevet nærmere i det som følger.

### Prisregime med minst en $r_t^* \in (0, \bar{r})$

I et prisregime hvor minst en  $t \in \{s+1, \dots, s+k\}$  tilfredsstillers  $r_t^* \in (0, \bar{r})$  vet jeg



at både  $\lambda^{min}$  og  $\lambda^{max}$  eksisterer fordi tappingen i timen hvor  $r_t^* \in (0, \bar{r})$  hverken er minimal eller maksimal. Fra (17) vet jeg da at alle timer hvor det tappes minimalt tilfredsstiller  $ap_t \leq \lambda^{min} \leq \lambda_{s+1}^{s+k}$ . Fra (16) vet jeg at alle timer hvor det tappes maksimalt tilfredsstiller  $ap_t \geq \lambda^{max} \geq \lambda_{s+1}^{s+k}$ . Av resultat (12) følger det at  $ap_t = \lambda_{s+1}^{s+k}$  i timen(e) hvor  $r_t^* \in (0, \bar{r})$ . Siden prisen i timen hvor  $r_t^* \in (0, \bar{r})$  bestemmer vannverdien må den være den laveste prisen av prisene i timene hvor det ikke tappes minimalt, og den høyeste prisen av prisene i timene hvor det ikke tappes maksimalt. Jeg kan derfor konkludere at i et prisregime hvor minst en time tilfredsstiller  $r_t^* \in (0, \bar{r})$  er

$$\lambda^{min} = \lambda_{s+1}^{s+k} = \lambda^{max} \quad (18)$$

Vannverdien settes lik prisen i den høyest prisede timen som har ledig slukekapasitet.

Resultatet ovenfor belyser et veldig viktig poeng angående tolkningen av  $\lambda_{s+1}^{s+k}$ . Den korrekte tolkningen av  $\lambda_{s+1}^{s+k}$  er at den viser verdien en ekstra enhet vann i time  $s+1$  kan skape. Fra time  $s+1$  vil vannet finne veien til timen hvor  $p_t a = \lambda_{s+1}^{s+k}$  og tappes der. Lærdommen er at vannverdien er knyttet til prisregimer, ikke enkelt-timer. Det kan være misvisende å snakke om "vannverdien i time  $t$ " i denne modellen<sup>9</sup> fordi det kan gi inntrykk av at vannverdien viser verdien av å overføre en ekstra enhet vann fra time  $t-1$  til time  $t$ . Den korrekte tolkningen av vannverdien i time  $t$  er at den viser verdien av å overføre en ekstra enhet vann til den første timen i prisregimet som time  $t$  tilhører.

Som oftest har prisregimer minst en time hvor  $r_t^* \in (0, \bar{r})$ . Noen ganger kan man imidlertid støte på prisregimer hvor  $r_t^* \notin (0, \bar{r})$  for alle  $t \in \{s+1, \dots, s+k\}$ . Hvordan vannverdien bestemmes i slike prisregimer er tema for det som følger.

### Prisregime med uunngåelig overløp

I en situasjon med uunngåelig overløp forventes høyt tilsig i de  $k \geq 1$  timene som utgjør prisregimet. Tilsiget er så høyt i de  $k$  problemtimene at magasinet renner over i time  $s+k$  slik at

$$R_{s+k-1}^* + w_{s+k} - r_{s+k}^* > R_{s+k}^*$$

Betingelsen i (8c) sier da at  $\lambda_{s+k}^* = 0$ , og siden alle vannverdiene i prisregimet er like

---

<sup>9</sup>Med unntak av når time  $t$  utgjør et eget prisregime. For ordens skyld bør man da si prisregimet i time  $t$ .

følger det at  $\lambda_{s+1}^{s+k} = 0$ . Videre, siden alle priser er antatt positive følger det av (13) at det må være maksimal tapping i alle timer. Fra dette følger det at  $\lambda^{max}$  eksisterer og  $\lambda^{min}$  ikke eksisterer. Siden  $\lambda_{s+1}^{s+k} = 0$  følger det at vannverdien i time  $s$  (som tilhører forrige prisregime) må være større eller lik  $\lambda_{s+1}^{s+k}$ . Ofte i slike situasjoner vil  $R_s^* = 0$  og  $\lambda_s^* \geq 0$ . Det er imidlertid ingen ting i veien for at  $R_s^* = \bar{R}$ , men da må  $\lambda_s^* = 0$ . Det viktige er at overløpet i time  $s + k$  er *uunngåelig* i den forstand at alt som kan gjøres har blitt gjort for å minimere  $R_s^*$  i timene før time  $s + 1$ . Når alt dette settes sammen følger det at hvis man har et prisregime med uunngåelig overløp, det vil si en situasjon hvor  $r_t^* = \bar{r}$  for alle  $t \in \{s + 1, \dots, s + k\}$  og  $R_{s+k-1}^* + w_{s+k} - r_{s+k}^* > R_{s+k}^*$  så er

$$0 = \lambda_{s+1}^{s+k} < \lambda^{max} \quad (19)$$

Resultatet sier at hvis planen legger opp til uunngåelig overløp i time  $s + k$  så er vannverdien lik 0.

### Prisregime med $r_t^* = \bar{r}$ alle $t$ ; ikke overløp

I et prisregime hvor  $r_t^* = \bar{r}$  for alle  $t \in \{s + 1, \dots, s + k\}$  følger det av (16) og (17) at  $\lambda^{min}$  ikke eksisterer,  $\lambda^{max}$  eksisterer og  $\lambda_{s+1}^{s+k} \leq \lambda^{max} \leq ap_t$  for alle  $t$ .

Det er to mulige verdier for magasinbeholdningen ved utgangen av time  $s + k$ . I det første tilfellet er  $R_{s+k}^* = \bar{R}$ , og det følger av (10) at  $\lambda_{s+k}^* \leq \lambda_{s+k+1}^*$ . All informasjon til nå forteller at

$$0 \leq \lambda_{s+1}^{s+k} \leq \begin{cases} \lambda_{s+k+1}^* \\ \lambda^{max} \end{cases}$$

Vannverdien blir ikke entydig bestemt av modellen i dette tilfellet. Det eneste jeg kan si om vannverdien utifra betingelsene ovenfor er at  $0 \leq \lambda_{s+1}^{s+k} \leq \min\{\lambda_{s+k+1}^*, \lambda^{max}\}$ .<sup>10</sup> Fra en planleggers ståsted er det imidlertid klarere hva korrekt vannverdi bør være. Siden det tappes maksimalt i alle timer og magasinet er fullt i time  $s + k$  vil en ekstra enhet vann overført til time  $s + 1$  ende opp med å renne ut av magasinet i time  $s + k$ . Vannverdien er altså 0. Jeg konkluderer derfor at hvis  $r_t^* = \bar{r}$  for alle  $t \in \{s + 1, \dots, s + k\}$ ,  $R_{s+k}^* = \bar{R}$  og magasinet ikke renner over så er

$$0 = \lambda_{s+1}^{s+k} < \min\{\lambda_{s+k+1}^*, \lambda^{max}\} \quad (20)$$

---

<sup>10</sup>Når jeg konstruerer slike situasjoner i *Mathematica* velger tilsynelatende datamaskinen alltid  $\lambda_{s+1}^{s+k} = \min\{\lambda_{s+k+1}^*, \lambda^{max}\}$ .

I det andre tilfellet er  $R_{s+k}^* = 0$ . Da sier (10) at  $\lambda_{s+k}^* \geq \lambda_{s+k+1}^*$ . All informasjon til nå gir

$$\lambda_{s+k+1}^* \leq \lambda_{s+1}^{s+k} \leq \lambda^{max}$$

Også her gir ikke modellen en entydig løsning for  $\lambda_{s+1}^{s+k}$ .<sup>11</sup> Fra en planleggers ståsted er det klarere hva vannverdien bør være. Siden det er maksimal tapping i alle timer vil en ekstra enhet vann overført til time  $s+1$  ende opp med å bli overført til time  $s+k+1$ . Vannverdien er derfor lik vannverdien i time  $s+k+1$ . Jeg konkluderer at hvis  $r_t^* = \bar{r}$  for alle  $t \in \{s+1, \dots, s+k\}$  og  $R_{s+k}^* = 0$  så er

$$\lambda_{s+k+1}^* = \lambda_{s+1}^{s+k} \leq \lambda^{max} \quad (21)$$

### Prisregime med $r_t^* = 0$ alle $t$

I et prisregime hvor  $r_t^* = 0$  for alle  $t \in \{s+1, \dots, s+k\}$  eksisterer  $\lambda^{min}$ ,  $\lambda^{max}$  eksisterer ikke og  $\lambda_{s+1}^{s+k} \geq \lambda^{min} \geq ap_t$  for alle  $t$ .

Det er to mulige verdier for magasinbeholdningen ved utgangen av time  $s+k$ . I det første tilfellet er  $R_{s+k}^* = \bar{R}$  som medfører at  $\lambda_{s+k}^* \leq \lambda_{s+k+1}^*$ . All informasjon til nå gir

$$\lambda^{min} \leq \lambda_{s+1}^{s+k} \leq \lambda_{s+k+1}^*$$

Vannverdien blir ikke entydig bestemt av modellen i dette tilfellet.<sup>12</sup> Fra en planleggers ståsted er det klarere hva korrekt vannverdi er. Hvis man overfører en ekstra enhet vann til time  $s+1$  vil den kunne tappes i alle timer innad i prisregimet. Siden magasinet er fullt i time  $s+k$  kan den ikke overføres til time  $s+k+1$ . Vannverdien er derfor lik den høyeste oppnåelige prisen innad i prisregimet og denne prisen er per definisjon  $\lambda^{min}$ . Jeg konkluderer at hvis  $r_t^* = 0$  for alle  $t \in \{s+1, \dots, s+k\}$  og  $R_{s+k}^* = \bar{R}$  så er

$$\lambda^{min} = \lambda_{s+1}^{s+k} \leq \lambda_{s+k+1}^* \quad (22)$$

I det andre tilfellet er  $R_{s+k}^* = 0$  som medfører  $\lambda_{s+k}^* \geq \lambda_{s+k+1}^*$ . Siden magasinet også er tomt ved inngangen til time  $s+1$  må  $\lambda_s^* \geq \lambda_{s+1}^*$ . Merk at det må holde at

---

<sup>11</sup>Når jeg konstruerer slike situasjoner i *Mathematica* velger modellen tilsynelatende alltid  $\lambda_{s+1}^{s+k} = \lambda_{s+k+1}^*$ .

<sup>12</sup>Når jeg konstruerer slike situasjoner i *Mathematica* velger modellen tilsynelatende alltid  $\lambda_{s+1}^{s+k} = \lambda_{s+k+1}^*$ .

$k = 1$  for at dette tilfellet skal være mulig, og  $w_{s+1} = 0$  for at tilfellet skal kunne være forenelig med en inntektsmaksimerende plan. Videre, siden  $k = 1$  følger det at  $\lambda^{min} = ap_{s+1}$ . All informasjon til nå forteller at

$$\left. \begin{array}{l} ap_{s+1} \\ \lambda_{s+2}^* \end{array} \right\} \leq \lambda_{s+1}^{s+1} \leq \lambda_s^*$$

Vannverdien blir ikke entydig bestemt av modellen. Det meste man kan si fra betingelsen ovenfor er at  $\max\{ap_{s+1}, \lambda_{s+2}^*\} \leq \lambda_{s+1}^{s+1} \leq \lambda_s^*$ . Fra en planleggers ståsted er det klarere hva korrekt vannverdi bør være. En ekstra enhet vann kan både tappes i time  $s + 1$  eller spares til time  $s + 2$ . Siden begge er mulige velger planleggeren det inntektsmaksimerende alternativet. Jeg kan derfor konkludere at hvis  $r_t^* = 0$  for  $t = s + 1$  og  $R_{s+1}^* = 0$  så er

$$\max\{ap_{s+1}, \lambda_{s+2}^*\} = \lambda_{s+1}^{s+1} \leq \lambda_s^* \quad (23)$$

**Prisregime med minst en  $r_t^* = 0$  og en  $r_t^* = \bar{r}$ ; resten  $r_t^* \notin (0, \bar{r})$**

Siden minst en time har  $r_t^* = 0$  vet jeg at  $\lambda^{min}$  eksisterer. Siden minst en time har  $r_t^* = \bar{r}$  vet jeg at  $\lambda^{max}$  eksisterer.

Igjen er det er to mulige tilfeller for magasinbeholdningen ved utgangen av time  $s + k$ . I det første tilfellet er  $R_{s+k}^* = \bar{R}$ . Da vet jeg at  $\lambda_{s+k}^* \leq \lambda_{s+k+1}^*$ . All informasjon til nå gir

$$\lambda^{min} \leq \lambda_{s+1}^{s+k} \leq \begin{cases} \lambda^{max} \\ \lambda_{s+k+1}^* \end{cases}$$

Vannverdien blir ikke entydig bestemt av modellen. Nok en gang er ting klarere fra en planleggers ståsted. En ekstra enhet vann kan tappes i timene som har  $r_t^* = 0$ . Vannet kan ikke tappes i timene som har  $r_t^* = \bar{r}$  fordi all tilgjengelig slukekapasitet er allerede fullt utnyttet. Vannet kan heller ikke overføres til time  $s + k + 1$  siden magasinet er fullt ved utgangen av time  $s + k$ . Vannverdien bør derfor settes lik prisen i den høyest prisede timen med ledig slukekapasitet, altså  $\lambda^{min}$ . Jeg konkluderer derfor at hvis minst en  $r_t^* = 0$  og minst en  $r_t^* = \bar{r}$ , resten  $r_t^* \notin (0, \bar{r})$  og  $R_{s+k}^* = \bar{R}$  så er

$$\lambda^{min} = \lambda_{s+1}^{s+k} \leq \min\{\lambda^{max}, \lambda_{s+k+1}^*\} \quad (24)$$

Hvis  $R_{s+k}^* = 0$  så er  $\lambda_{s+k}^* \geq \lambda_{s+k+1}^*$ . All informasjon til nå gir

$$\left. \begin{array}{l} \lambda^{min} \\ \lambda_{s+k+1}^* \end{array} \right\} \leq \lambda_{s+1}^{s+k} \leq \lambda^{max}$$

Vannverdien blir ikke entydig bestemt av modellen. Fra en planleggers ståsted er det klarere hva korrekt vannverdi er. En ekstra enhet vann kan tappes i timene hvor  $r_t^* = 0$  fordi det er ledig slukekapasitet. Den kan ikke tappes i timene hvor  $r_t^* = \bar{r}$  fordi det ikke er ledig slukekapasitet. Den kan spares til time  $s + k + 1$  fordi det er ledig magasinkapasitet ved utgangen av time  $s + k$ . Vannverdien bør derfor være den høyeste av  $\lambda^{min}$  og  $\lambda_{s+k+1}^*$ . Jeg kan derfor konkludere at hvis minst en  $r_t^* = 0$  og minst en  $r_t^* = \bar{r}$ , resten  $r_t^* \notin (0, \bar{r})$  og  $R_{s+k}^* = 0$  så er

$$\max\{\lambda^{min}, \lambda_{s+k+1}^*\} = \lambda_{s+1}^{s+k} \leq \lambda^{max} \quad (25)$$

## Oppsummering

Jeg har nå gått gjennom alle de mulige prisregimene en kan støte på i modellen. I flere av prisregimene blir ikke vannverdien entydig bestemt av de nødvendige betingelsene i (8) og man må argumentere for korrekt vannverdi fra et planleggingsperspektiv. Det er viktig å være bevisst på dette hvis man tenker å programmere modellen på en datamaskin. Hvis man ikke forteller maskinen hvordan skyggeprisene skal velges vil den ofte allokere skyggeprisene slik at vannverdien blir feil (typisk for høy etter hva jeg har erfart). Dette kan særlig være misvisende i situasjoner hvor magasinet akkurat ikke renner over i time  $s + k$  og vannverdien egentlig er 0 men datamaskinen velger en pris som er mye høyere.

Resultatene fra alle de mulige tilfellene oppsummeres i Tabell 1. I alle de fire casene er prinsippet for fastsettelsen av vannverdien den samme, nemlig at vannverdien settes lik den høyeste verdien en ekstra enhet vann i time  $s + 1$  kan oppnå. Det eneste som er forskjellig i de fire casene er hva som legges i "kan oppnå". I den første casen er det ledig slukekapasitet innad i prisregimet så  $\lambda^{min}$  kan oppnås. Videre er magasinkapasiteten fullt utnyttet ved utgangen av time  $s + k$  så  $\lambda_{s+k+1}^*$  kan ikke oppnås. Dermed er vannverdien  $\lambda^{min}$ . I den andre casen er det både ledig slukekapasitet innad i prisregimet og ledig magasinkapasitet ved utgangen av time  $s + k$  så både  $\lambda^{min}$  og  $\lambda_{s+k+1}^*$  kan oppnås. Vannverdien settes lik den høyeste verdien av disse to. I den tredje casen er det ikke ledig slukekapasitet innad i prisregimet

så  $\lambda^{min}$  kan ikke oppnås. Det er ledig magasinkapasitet i time  $s + k$  så  $\lambda_{s+k+1}^*$  kan oppnås. Dermed er vannverdien  $\lambda_{s+k+1}^*$ . I den fjerde og siste casen er både slukekapasiteten innad i prisregimet og magasinkapasiteten ved utgangen av time  $s + k$  fullt utnyttet. En ekstra enhet vann i time  $s + 1$  vil renne ut av magasinet. Dermed er vannverdien 0.

Case	Minst en $r_t^* < \bar{r}$	$R_{s+k}^*$	Overløp	Vannverdi lik
1	Ja	$\bar{R}$	Nei	$\lambda^{min}$
2	Ja	0	Nei	$\max\{\lambda^{min}, \lambda_{s+k+1}^*\}$
3	Nei	0	Nei	
4	Nei	$\bar{R}$	Ja og Nei	$\lambda_{s+k+1}^*$
				0

Tabell 1: Mulige caser for vannverdien i et prisregime

### 2.3.4 Den siste planleggingstimen

Slik modellen er definert er lagret vann verdiløst i den siste planleggingstimen fordi det ikke eksisterer en time  $T + 1$  i modellen hvor produsenten alternativt kan selge elektrisitet. Dette vil si at  $\lambda_{T+1} = 0$ . Enhver ikke-triviell plan vil derfor minimere magasinbeholdningen i den siste planleggingstimen. Avhengig av tilsiget mot slutten av planleggingsperioden kan man få tre mulige utfall. I det første er magasinet tomt ved utgangen av time  $T$  slik at  $R_T^* = 0$ . Av dette vet jeg at vannverdien må tilhøre case 2 eller case 3 i Tabell 1. Husk at vannverdien i denne modellen er verdien en ekstra enhet vann i time  $s + 1$  kan skape og at det siste prisregimet ikke må begynne i time  $T$ . Løsningen for den siste timen blir i dette tilfellet

$$\begin{aligned}
R_T^* &= 0 \\
r_T^* &= R_{T-1}^* + w_T \\
\lambda_T^* &= \begin{cases} \max\{\lambda^{min}, 0\} = \lambda^{min} & \text{hvis case 2} \\ \lambda_{T+1} = 0 & \text{hvis case 3} \end{cases}
\end{aligned}$$

I den andre muligheten er  $R_T^* = \bar{R}$  (tilsaget mot time  $T$  må være høyt). Fra Tabell 1 finner jeg at case 1 og 4 er mulige siden  $R_T^* = \bar{R}$ . Videre kan jeg utelukke case 1 fordi resultatet i (10) sier at  $\lambda_T^* \leq \lambda_{T+1} = 0$ . Planen for den siste timen blir

derfor

$$R_T^* = \overline{R}$$

$$r_T^* = \bar{r}$$

$$\lambda_T^* = 0$$

I den tredje og siste muligheten er  $R_t^* \in (0, \overline{R})$ . Jeg sparte denne til slutt fordi denne muligheten fanges ikke opp av Tabell 1. Av (9) følger det at  $\lambda_T^* = \lambda_{T+1} = 0$ . Siden resultatet for vannverdien alltid vil være likt så lenge  $R_T^* > 0$  i time  $T$  utvider jeg forståelsen av et prisregime til å inkludere at time  $T$  alltid markerer slutten på et prisregime. Hvis  $R_T^* = 0$  gjelder case 2 og 3. Hvis  $R_T^* > 0$  gjelder case 4 uten at magasinet trenger å være fullt.

Det er viktig å være bevisst på konsekvensene antagelsen om gitt planleggingshorisont vil ha for de kalkulerte vannverdiene. I virkeligheten er det mulig å selge elektrisitet også etter time  $T$ , noe som åpner opp for muligheten at  $\lambda_{T+1}^* > 0$  hvis flere timer hadde vært inkludert i modellen. Siden modellen alltid velger  $\lambda_{T+1} = 0$  vil vannverdien i siste prisregime og kanskje enda flere prisregimer kunne bli feilaktige. Vannverdien i et prisregime har blitt feilestimert hvis den hadde blitt annerledes av å legge uendelig mange planleggingstimer til grunn for modellen. Denne effekten kaller jeg terminaleffekten. Terminaleffekten vil i mange tilfeller forårsake feilaktig minimering av magasinbeholdningen i time  $T$ , og dermed underestimerte vannverdier i det siste prisregimet. For å kunne bruke modellen til å verdsette den tilgjengelige produksjonskapasiteten holder det normalt at de første prisregimene er upåvirket av terminaleffekten. Så hvordan kan man vite når et prisregime vil være upåvirket av fremtiden? Alle prisregimer til og med et prisregime hvor  $R_{s+k}^* = \overline{R}$  kan man være sikker på vil være upåvirket av fremtiden. I et slikt regime gjelder enten case 1 eller case 4 i Tabell 1 og vannverdien settes utifra forhold internt i prisregimet ikke som følge av hva fremtiden kan bringe.

### 2.3.5 Den første planleggingstimen

Den første planleggingstimen ( $t = 1$ ) har spesiell betydning i modellen. Uavhengig av magasinbeholdningen ved utgangen av time 0 vil alltid time 1 representere den første timen i det første prisregimet, og dermed være en time av type " $s + 1$ " jf.

definisjonen av et prisregime i (15). I neste seksjon skal jeg argumentere at det bør alltid være kapasiteten i time 1 som verdsettes når man skal utlede tilbudskurver.

### 2.3.6 Tilbudskurve

I time 0 holdes det en auksjon hvor markedet klareres for time 1. Til hvilke priser skal produsenten tilby sin tilgjengelige produksjonskapasitet? Først må han ta stilling til hva den tilgjengelige produksjonskapasiteten i time 1 er. Hvis han forventer å ha mer vann i magasinet enn slukekapasiteten kan han tilby maksimal produksjon. Hvis han forventer å ha mindre vann i magasinet enn slukekapasiteten tilbyr han produksjonsekvivalenten av dette. Tilgjengelig vann som kan tappes i time 1 er derfor

$$\bar{x}_1 = \min\{\bar{r}, R_0 + w_1\}$$

Selvom tapping av vann er en kontinuerlig variabel skal jeg her dele tilgjengelig vann som kan tappes i time 1 opp i enheter kubikkmeter vann slik at den tilgjengelige kapasiteten  $x_1$  kan anta verdier  $x_1 \in \{1, \dots, \bar{x}_1\}$ . Tolkningen av vannverdien i time 1 når modellen kjøres med  $R_0 + w_1$  enheter tilgjengelig vann i time 1 er verdien en ekstra enhet vann i time 1 kan skape. Min vurdering av dette er at vannverdien gir verdien av enhet nummer  $R_0 + w_1 + 1$  som er tilgjengelig i time 1. Jeg skal bruke dette til å verdsette vannet som kan tappes i time 1.

La  $V_1(x_1) = R_0 + w_1 - x_1$  representere tilgjengelig vann i time 1 for verdier av  $x_1 \in \{1, \dots, \bar{x}_1\}$ . Verdien av den første enheten som kan selges i time 1 ( $x_1 = 1$ ) fremkommer ved å kjøre modellen med  $V_1(1) = R_0 + w_1 - 1$  enheter vann tilgjengelig i time 1. Verdien av den første enheten representeres med  $\lambda_1^*(1; V_1(1))$  og tolkes som verdien av enhet nummer  $(R_0 + w_1 - 1) + 1$ , altså verdien av den første enheten som kan selges i time 1. På denne måten kan man verdsette alle  $x_1 \in \{1, \dots, \bar{x}_1\}$  og få ut en vannverdi  $\lambda_1^*(x_1; V_1(x_1))$ . Siden mer plass i magasinet øker fleksibiliteten må  $\lambda_1^*(x_1 + 1; V_1(x_1 + 1)) \geq \lambda_1^*(x_1; V_1(x_1))$  for alle  $x_1 \in \{1, \dots, \bar{x}_1 - 1\}$ .

Det gjenstår å formulere produsentens tilbudsfunksjon i time 1. For å spare plass skrives  $\lambda_1^*(x_1; V_1(x_1)) = \lambda_1^*(x_1)$  i det som følger. Produsenten er en profittmaksimerende pristaker og bør derfor være villig til å selge den  $x_1$ -te enheten så lenge han får en pris  $p_1$  som er større eller lik enhetens verdi  $\lambda_1^*(x_1)$ . Produsentens



villighet til å selge  $ax_1$  MWh energi i time 1 kan derfor beskrives med indikator-funksjonen

$$I_1(x_1; p_1) = \begin{cases} ax_1 & \text{hvis } \lambda_1^*(x_1) \leq ap_1 \\ 0 & \text{hvis } \lambda_1^*(x_1) > ap_1 \end{cases}$$

Til en gitt pris  $p_1$  vil det kunne være flere kvantum av  $x_1 \in \{1, \dots, \bar{x}_1\}$  som produsenten kunne tenke seg å selge. For eksempel, hvis han vil selge 3 MWh til pris 30 €/MWh så vil han selge 1 og 2 MWh også. For å luke bort alle ikke-maksimale kvantum innføres

$$\max_{x_1 \in [0, \bar{x}_1]} [I_1(x_1; p_1)]$$

som returnerer det maksimale kvantum produsenten ønsker å selge gitt prisen  $p_1$ . Sett at børsen krever at produsenten anmelder et sammenhengende tilbud på priser fra en teknisk minimumspris  $\underline{p}$  til en teknisk maksimumspris  $\bar{p}$ . Fra dette følger det at produsentens tilbudsfunksjon er

$$S_1(p_1) = \max_{x_1 \in [0, \bar{x}_1]} [I_1(x_1; p_1)] \quad \text{for } p_1 \in [\underline{p}, \bar{p}]$$

Tilbudsfunksjonen vil typisk se ut som en trapp for økende priser hvor tilbudt kvantum har høyst tre nivåer.

I praksis så anmeldes tilbud for 24 timer om gangen til Nord Pool Spot, ikke en time slik som ovenfor. Jeg er litt usikker på hvordan man skal kunne beskrive tilbudet når man skal lage flere enn en tilbudskurve. Slik som spotmarkedet i Norden fungerer i dag er det ikke mulig å betinge salget i time 2 på salget i time 1.<sup>13</sup> Når man ikke vet hvor mye man har solgt i time 1 kan man ikke vite hvor mye produksjonskapasiteten i timene 2 – 24 er verdt. Denne usikkerheten kommer man ikke bort ifra. Jeg tror det beste man kan gjøre når man verdsetter kapasiteten i en time  $h > 1$  er å legge til grunn at alle timer frem til time  $h$  selger i henhold til den initielle produksjonsplanen. På den måten kan man bruke magasinbeholdningen ved utgangen av time  $h - 1$  og bruke den som " $R_0$ " i en ny modellkjøring hvor tilsigs- og prisseriene som legges til grunn begynner i time  $h$ . Da kan man bruke samme fremgangsmåte som beskrevet ovenfor til å verdsette produksjonskapasiteten i flere timer fremover. Når markedet

---

<sup>13</sup>Det finnes blokkbud hvor man kan tilby "alt eller ingenting" for et gitt kvantum i en blokk med minst 3 naboliggende timer hvor tilbudsprisen referer til gjennomsnittsprisen i timene. Det ikke mulig å anmelde tilbud på formen  $S_t(p_1, \dots, p_{24})$ . Dette ville komplisert markedsklareringen vesentlig. En digresjon i lys av dette: Hvis det ikke er mulig å anmelde etterspørselskurver som hensyntar preferanser for å substituere forbruk over døgnet, hvordan skal man kunne representere etterspørselssiden når automatiske målesystemer innføres?

klareres og produsenten lærer hvor mye han faktisk solgte det kommende døgnet kan han forsøke å etterjustere kontraktposisjonen i et sekundærmarked som Elbas på grunnlag av en ny modellkjøring der den nye informasjonen er hensyntatt.

## 2.4 Modellen på matriseform

Maksimeringsproblemet i relasjon (6) er et lineært programmeringsproblem som med matrisenotasjon kan formuleres<sup>14</sup>

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{c}\mathbf{x} \text{ gitt } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ og } \mathbf{x} \geq 0$$

I maksimeringsproblemet er vektoren  $\mathbf{c}$  en rekkevektor med  $2T$  kolonner på formen

$$\mathbf{c} = [a \cdot \mathbf{p}, \mathbf{0}] \text{ med } \mathbf{p} = [p_1, \dots, p_T] \text{ og } \mathbf{0} = [0, \dots, 0]$$

Vektoren  $\mathbf{x}$  er en kolonnevektor med  $2T$  rader på formen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \text{ med } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_T \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_T \end{bmatrix}$$

Vektoren  $\mathbf{b}$  er en kolonnevektor med  $3T$  rader på formen

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \bar{\mathbf{r}} \\ \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \text{ med } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} R_0 + w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_T \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \bar{r} \\ \vdots \\ \bar{r} \end{bmatrix} \text{ og } \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \vdots \\ \bar{R} \end{bmatrix}$$

hvor vektorene  $\bar{\mathbf{r}}$  og  $\bar{\mathbf{R}}$  har  $T$  rader hver. I disse vektorene kan man gjerne sette inn tidsavhengige kapasiteter, for eksempel hvis man ønsker å hensynta timer hvor man planlegger å ha vedlikehold på turbinen eller at den øvre vannstanden i magasinet er regulert etter sesong.

---

<sup>14</sup>Jeg setter opp problemet på denne måten så det kan løses i *Mathematica* med kommandoen **DualLinearProgramming[-c, -A, -b]**.

Matrisen  $\mathbf{A}$  har dimensjon  $3T \times 2T$  og er på formen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{H} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

hvor  $\mathbf{I}$  er en identitetsmatrise og  $\mathbf{0}$  er en nullmatrise. Matrisene  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{0}$  og  $\mathbf{H}$  har alle dimensjon  $T \times T$ . Det er nyttig og ha modellen på matriseform da den enklere kan programmeres og løses numerisk for store verdier av  $T$ .

## 2.5 Et eksempel

Jeg har programmert modellen i *Mathematica* slik at jeg kan presentere et eksempel.<sup>15</sup> I eksemplet er parameterverdiene jeg har lagt til grunn  $a = 1$ ,  $T = 20$ ,  $R_0 = 25$ ,  $\bar{R} = 80$  og  $\bar{r} = 10$ . Tilsigs- og prisseriene er gjengitt i Tabell 2 sammen med resultatene. Jeg presiserer at inndataene jeg har brukt er konstruert for å vise så mange effekter som mulig, ikke for å lage et virkelighetsnært scenario.

Resultatene fra den initielle modellkjøringen (med  $R_0=25$ ) er gjengitt i Tabell 2 og 3. Av tabellene kan man se at i prisregimet fra time 1 til 6 blir vannverdien satt lik prisen i time 1 som er en time som hverken tapper minimalt eller maksimalt. Dette er den høyest prisede timen av timene som har ledig slukekapasitet i dette prisregimet. Magasinet tømmes i time 6 i påvente av høyt tilsig i time 8 til 10. Terminaleffekten påvirker ikke som en følge av dette.

Time 7 er et eget prisregime. Det er ikke noe vann tilgjengelig for tapping så magasinet forblir tomt. Hadde produsenten fått en ekstra enhet vann i time 7 hadde han foretrukket å tappe den i time 7 fordi prisen i time 7 er høyere enn vannverdien i time 8. Ingen terminaleffekt her heller av samme grunn som ovenfor.

Prisregimet fra time 8 til 10 representerer en situasjon med uunngåelig overløp. Til tross for tomt magasin ved inngangen til perioden og maksimal tapping i alle timer, renner 5 enheter vann ut av magasinet i time 10. Hadde en ekstra enhet vann blitt tilgjengelig i time 8 ville også denne enheten gått til spille i time 10. Vannverdien er derfor 0. I alle timene er kapasitetsprisen ( $\theta_t^*$ ) er positiv og lik prisen,

---

<sup>15</sup>Se vedlegget for koden

$t$	$p_t$	$\lambda_t^*$	$\theta_t^*$	$\gamma_t^*$	$r_t^*$	$R_t^*$	$w_t$
1	32	32	0	0	1	25	1
2	31	32	0	0	0	26	1
3	30	32	0	0	0	27	1
4	33	32	1	0	10	18	1
5	39	32	7	0	10	9	1
6	34	32	2	0	10	0	1
7	29	29	0	0	0	0	0
8	19	0	19	0	10	40	50
9	20	0	20	0	10	70	40
10	22	0	22	0	10	80	25
11	30	0	30	10	10	80	10
12	37	10	27	0	10	66	1
13	32	10	22	0	10	57	1
14	10	10	0	0	1	57	1
15	34	10	24	0	10	48	1
16	43	10	33	0	10	39	1
17	42	10	32	0	10	30	1
18	41	10	31	0	10	20	0
19	40	10	30	0	10	10	0
20	39	10	29	0	10	0	0

Tabell 2: Resultater fra modellen

Prisregime	Vannverdi	Kommentar
Time 1-6	32	Vannverdi lik pris i time 1. Ikke terminaleffekt
Time 7	29	Tomt for vann. Vannverdi lik pris i time 7. Ikke terminaleffekt
Time 8-10	0	Uungålig overløp i time 10. Ikke terminaleffekt
Time 11	0	Datamaskin allokterer skyggeprisene feil. Ikke terminaleffekt
Time 12-20	10	Vannverdi lik pris i time 14. Skyldes trolig terminaleffekt

Tabell 3: Prisregimer, vannverdier og kommentarer

$x_1$	$\lambda_1^*(x_1)$	$V_1(x_1)$		
1	32	25		
2	33	24		
3	33	23		
4	33	22		
5	33	21		
6	33	20		
7	33	19		
8	33	18		
9	33	17		
10	33	16		

$p_1$	$S_1(p_1)$
$p_1 \in [\underline{p}, 32)$	0
$p_1 \in [32, 33)$	1
$p_1 \in [33, \bar{p}]$	10

Tabell 4: Venstre:  $\lambda_1^*(x)$ , funnet for  $V_1(x_1) = R_0 + w_1 - x_1$ . Høyre: Tilbudsfunksjonen.

noe som signaliserer at en ekstra kubikkmeter slukekapasitet i disse timene hadde muliggjort salg av en ekstra kubikkmeter vann.

Time 11 er et eget prisregime hvor tappingen er maksimal og magasinet renner akkurat ikke over ved utgangen av timen. En ekstra enhet vann i denne timen hadde forsvunnet ut av magasinet. Vannverdien er derfor 0. Modellen i *Mathematica* velger  $\lambda_{11}^{11} = \lambda_{12}^{20} = 10$  i denne timen, noe som ikke gir mening fra et planleggingsperspektiv. Istedet bør  $\lambda_{11}^{11} = 0$  og  $\gamma_{11}^* = 10$  for å signalisere at verdien en ekstra enhet magasin-kapasitet kunne skapt i time 11. Siden magasinet er fullt i time 11 er det ikke noen terminaleffekt her heller.

Det siste prisregimet fra time 12 til 20 bærer preg av at magasinet tømmes mot den siste timen. Alle timene har positiv tapping, inkludert time 14 som er en time med relativt lav pris. Hadde produsenten planlagt over flere enn 20 timer er det gode sjanser for at situasjonen i de nye timene som legges til grunn endrer planen slik at det ikke lengre tappes i 14 og vannverdien i prisregimet blir høyere. De kalkulerne vannverdiene i dette prisregimet er derfor trolig ikke til å stole på på grunn av terminaleffekten.

Tabellen til venstre i Tabell 2.5 viser vannverdiene for de forskjellige enhetene med tilgjengelig vann. Vannverdiene ble funnet ved å kjøre modellen 10 ganger med  $V_1(x_1) = R_0 + w_1 - x_1$  enheter vann tilgjengelig vann i time 1 hvor  $x_1 = 1, \dots, 10$ . Tabellen til venstre i Tabell 2.5 fremstiller produsentens tilbudsfunksjon i time 1. Tilbudsfunksjonen angir hvilke kvantum MWh energi produsenten er villig til å selge til forskjellige elektrisitetspriser  $p_1$  innenfor intervallet  $[\underline{p}, \bar{p}]$ . Tilbudt kvantum antar

tre nivåer til stigende priser: 0 MWh for  $p_1 \in [\underline{p}, 32)$ , 1 MWh for  $p_1 \in [32, 33)$  og 10 MWh for  $p_1 \in [33, \bar{p}]$ .

## 3 Forventede timepriser

### 3.1 Innledende kommentarer

Av modellen for et regulerbart vannkraftverk i seksjon 2 fremkom det at prisserien som legges til grunn i planleggingen spiller en viktig rolle i forbindelse med å anmelde tilbud til spotmarkedet. Alle vannkraftprodusenter er avhengige av å tilegne seg så gode prisanslag som mulig for å utnytte sine ressurser effektivt. I denne delen skal jeg jobbe utifra en antagelse om at prisdannelsen i det finansielle markedet domineres av store ressurssterke aktører som har god tilgang på informasjon og modellerer hele kraftsystemet for å danne forventninger til fremtidige priser. Videre antar jeg at små aktører ikke har like gode forutsetninger for å modellere systemet fordi de ikke har tilgang på like mye informasjon som de store aktørene. Med dette som motivasjon skal jeg se nærmere på en metode for å "hente" ut de ressurssterke aktørenes prisforventninger fra offentlig tilgjengelige markedsdata fra det finansielle markedet. Man får ikke prisserier som kan brukes til planlegging direkte fra det finansielle markedet fordi kontraktene som listes har leveringsperioder som strekker deg over flere timer, og prisene som vises er derfor å regne som gjennomsnittspriser. Kontrakter med lange leveringsperioder skjuler eventuell sesongvariasjon i kraftprisene som ligger bakenfor gjennomsnittet. Utfordringen er derfor å finne en metode som på en best mulig måte henter ut sesongvariasjonen som ligger bak gjennomsnittsprisene som vises i det finansielle markedet, som samtidig hensyntar eventuelle andre prisvariasjoner som ikke fanges opp av kontraktprisene.

Seksjon 3.2.1 og 3.2.2 presenterer en metode for å konstruere en glatt forwardkurve fra prisene som observeres i det finansielle markedet. Seksjon 3.2.3 gir et eksempel på to glatte forwardkurver jeg konstruerte i *Mathematica*. I seksjon 3.3 redegjør jeg for hvordan jeg har brukt den glatte forwardkurven kan brukes til å konstruere teoretiske ukepriser. Med utgangspunkt i ukeprisene konstruerer jeg døgnpriser ved å legge på et ukedagsmønster. På bakgrunn av ukedagprisene konstruerer jeg timepriser ved å legge på et timeprismønster. Underveis gir jeg eksempler. Seksjon 3.4 byr på noen kommentarer til metoden.

## 3.2 Modell for glatt forwardkurve

### 3.2.1 Beskrivelse av modellen

I denne seksjonen presenterer jeg en metode for å konstruere glatt forwardkurve fra observerte forwardpriser. Metoden som skal brukes er interpolering ved "Maximum Smoothness" og jeg baserer meg på kapittel 7 i Bent et al. (2008).

I modellen representerer  $F(T^s, T^e)$  markedsprisen på en listet forwardkontrakt med leveringsperiode fra  $T^s$  til  $T^e$ . Funksjonen  $f(t)$  representerer prisen på en teoretisk forwardkontrakt med levering i punktet  $t$  dersom en slik kontrakt hadde vært tilgjengelig for handel.<sup>16</sup> Hvis  $r > 0$  representerer den risikofrie renten og kontrakter kan handles kostnadsfritt er den teoretiske sammenhengen mellom  $F(T^s, T^e)$  og  $f(t)$

$$F(T^s, T^e) = \int_{T^s}^{T^e} w(r; t) f(t) dt \text{ med } w(r; t) = \frac{re^{-rt}}{e^{-rT^e} - e^{-rT^s}} \quad (26)$$

Likningen sier at prisen på den observerbare forwardkontrakten  $F(T^s, T^e)$  må være lik den neddiskonterte gjennomsnittsprisen,  $\int_{T^s}^{T^e} w(r; t) f(t) dt$  for de uendelig mange teoretiske forwardkontraktene med levering i tidsintervallet  $t \in [T^s, T^e]$ . Dette betyr at kontraktene må være priset slik at det ikke er mulig å oppnå en avkastning utover den risikofrie renten ved å inngå en kombinasjon av kontraktene med levering over  $[T^s, T^e]$ . Dette er den eneste teoretiske sammenhengen forwardkurven lener seg på. Resten er metode og vil bli beskrevet i det som følger.

Sett at  $m$  forwardkontrakter observeres i markedet og har forskjellige leveringsperioder gjengitt i listen

$$\Phi = \{(T_1^s, T_1^e), (T_2^s, T_2^e), \dots, (T_m^s, T_m^e)\}$$

Det vil ofte være noen kontrakter i  $\Phi$  som overlapper hverandre. For å kunne håndtere overlappende kontrakter lages en ny liste fra  $\Phi$

$$\Omega = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

Den nye listen  $\Omega$  lister alle leveringstidspunktene i  $\Phi$  nøyaktig en gang. Videre er  $\Omega$  ordnet i stigende rekkefølge slik at  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ .

---

<sup>16</sup>En kraftkontrakt med levering i et punkt gir lite mening i praksis fordi dette ville tilsvare et støt med strøm.

Det eksisterer uendelig mange teoretiske forwardkurver  $f(t)$  som tilfredsstiller betingelsen i (26). For å kunne velge ut en eksplisitt kurve som forhåpentligvis også er nær den sanne kurven innføres to ytterligere betingelser som kurven må tilfredsstille. Den første betingelsen er at forwardkurvens dobbeltderiverte  $f''(t)$  skal være kontinuerlig (kurven skal være  $C^2$ -kontinuerlig). Den andre betingelsen er at kurven skal være den kurven som har minimal total kurvatur gitt de to andre betingelsene.<sup>17</sup>

For å hensynta sesongvariasjon i de underliggende kraftprisene modelleres  $f(t)$  i to ledd

$$f(t) = s(t) + \varepsilon(t) \quad (27)$$

Her er representert  $s(t)$  en vilkårlig eksogen sesongfunksjon og  $\varepsilon(t)$  er en kontinuerlig dobbeltderiverbar tilpasningsfunksjon. Det er tilpasningsfunksjonen  $\varepsilon(t)$  som blir bestemt i modellen. Den kan ses på som et mål på avviket fra det normale sesongmønsteret. Betingelsene som ble påført forwardkurven oversettes derfor til å være påført tilpasningsfunksjonen. Artikkelforfatterene beviser at det optimale valget for tilpasningsfunksjon (den optimale klassen  $C^2$ -funksjoner) er en såkalt spline av 4. orden. For å definere splinen konstrueres  $n - 1$  stigende subintervaller med  $n - 2$  felles knutepunkter fra  $\Omega$

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$$

Over hvert subinterval  $[t_{j-1}, t_j]$   $j = 1, \dots, n$  defineres et polynom av 4. orden,  $P_j(t) = a_j t^4 + b_j t^3 + c_j t^2 + d_j t + e_j$ . Tilpasningsfunksjonen definert som en spline av 4. orden kan nå uttrykkes med

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} P_1(t) = a_1 t^4 + b_1 t^3 + c_1 t^2 + d_1 t + e_1 & \text{for } t \in [t_0, t_1] \\ P_2(t) = a_2 t^4 + b_2 t^3 + c_2 t^2 + d_2 t + e_2 & \text{for } t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \\ P_n(t) = a_n t^4 + b_n t^3 + c_n t^2 + d_n t + e_n & \text{for } t \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases} \quad (28)$$

Det er parameterverdiene for hvert polynom  $\mathbf{x}$  hvor

$$\mathbf{x}^{tr} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & \dots & a_n & b_n & c_n & d_n & e_n \end{bmatrix}$$

---

<sup>17</sup>Sett at man har tre punkter i et  $(x, y)$ -aksesystem hvor  $x$ -verdiene er strengt stigende. Sett så at man fører en penn gjennom punktene fra det første til det siste, så måler lengden på den resulterende kurven. Kurven som tilfredsstiller alle betingelsene er den korteste glatte kurven som er mulig å føre gjennom punktene.



som skal velges slik at forwardkurven etterlever betingelsene.

Tilpasningsfunksjonens totale kurvatur er integralet av kvadratet av den dobbelt-deriverte av tilpasningsfunksjonen over intervallet  $t \in [t_0, t_n]$ . Objektfunksjonen definert som tilpasningsfunksjonens minimerte totale kurvatur er gitt ved

$$\min_{\mathbf{x}} \int_{t_0}^{t_n} [\varepsilon''(t)]^2 dt \quad (29)$$

For at tilpasningsfunksjonen (og forwardkurven) skal ha kontinuerlige dobbelt-deriverte, må alle par med naboliggende polynomer ha like funksjonsverdier, første-deriverte og annenderiverte i knutepunktet der begge polynomer er definert. Dette resulterer i  $3(n-1)$  betingelser som på likningsform uttrykkes

$$\begin{aligned} P_{j+1}(t_j) &= P_j(t_j) \quad \text{for } j = 1, \dots, n-1 \\ P'_{j+1}(t_j) &= P'_j(t_j) \quad \text{for } j = 1, \dots, n-1 \\ P''_{j+1}(t_j) &= P''_j(t_j) \quad \text{for } j = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (30)$$

På det siste polynomet pålegges betingelsen at den førstederiverte skal være 0 i det siste leveringspunktet  $t_n$ . Denne betingelsen innføres fordi det er naturlig at kurven har mindre variasjon i den lange enden fordi det er langt frem i tid og dermed sjeldnere begivenheter egnet til å påvirke prisene vesentlig. Betingelsen på likningsform uttrykkes

$$P'_n(t_n) = 0 \quad (31)$$

De siste betingelsene kommer av kravet i (26) om at kurven skal være arbitrasjefri. For å forenkle beregningene er  $r$  satt til 0 slik at  $w(t; r)$  kan byttes ut med konstanten  $1/(T^s - T^e)$ . I følge artikkelforfatterene vil renteeffekten ved normale rentesatser være neglisjerbar uansett. Siden jeg skal bruke observerte sluttpriser i det som kommer markeres forwardprisene med toppskrift "C" for "Closing Price". Bibetingelsene på likningsform uttrykkes

$$F_i^C(T_i^s, T_i^e) = \frac{1}{T_i^e - T_i^s} \int_{T_i^s}^{T_i^e} (s(t) + \varepsilon(t)) dt \quad i = 1, \dots, m \quad (32)$$

### 3.2.2 Modellen på matriseform med løsningsbeskrivelse

Optimeringsproblemet blir normalt ganske stort og da er det nyttig å ha problemet på matriseform slik at det kan løses ved hjelp av en datamaskin.

Ved å skrive ut det totale integralet som summen av  $n$  del-integraler,<sup>18</sup> løse for del-integralene og faktorisere ut parameterene som en kolonnevektor  $\mathbf{x}$  med  $5n$  rader på formen

$$\mathbf{x}^{tr} = [a_1 \ b_1 \ c_1 \ d_1 \ e_1 \ \cdots \ a_n \ b_n \ c_n \ d_n \ e_n]$$

vil man oppdage at objektfunksjonen i (29) kan skrives på matriseform

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^{tr} \mathbf{H} \mathbf{x}$$

hvor matrisen  $\mathbf{H}$  har dimensjon  $5n \times 5n$  og er på formen

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{h}_n \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad \mathbf{h}_j = \begin{bmatrix} \frac{144}{5} \Delta_j^5 & 18 \Delta_j^4 & 8 \Delta_j^3 & 0 & 0 \\ 18 \Delta_j^4 & 12 \Delta_j^4 & 6 \Delta_j^2 & 0 & 0 \\ 8 \Delta_j^3 & 6 \Delta_j^2 & 4 \Delta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{hvor } \Delta_j^l = t_j^l - t_{j-1}^l \text{ for } j = 1, \dots, n \text{ og } l = 1, \dots, 5$$

Betingelsene på tilpasningsfunksjonen i hvert knutepunkt i (30) kan uttrykkes med den lineære matriselikningen

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

hvor matrisen  $\mathbf{A}_1$  har dimensjon  $3(n-1) \times 5n$  og er på formen

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\mathbf{k}_{n-1} & \mathbf{k}_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad \mathbf{k}_j = \begin{bmatrix} t_j^4 & t_j^3 & t_j^2 & t_j & 1 \\ 4t_j^3 & 3t_j^2 & 2t_j & 1 & 0 \\ 12t_j^2 & 6t_j & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

<sup>18</sup>Det vil si  $\int_{t_0}^{t_n} [\varepsilon''(t)]^2 dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} [P_j''(t)]^2 dt$

og  $\mathbf{b}_1$  er en kolonnevektor med  $3(n-1)$  rader på formen

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Betingelsen på det siste polynomet i det siste leveringspunktet i (31) kan uttrykkes med den lineære vektorlikningen

$$\mathbf{a}_2 \mathbf{x} = b_2$$

hvor  $b_2 = 0$  og  $\mathbf{a}_2$  er en rekkevektor med  $5n$  kolonner på formen

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4t_n^3 & 3t_n^2 & 2t_n & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Betingelsene i (32) er litt mer kompliserte. For å sette de opp på matriseform må jeg ta høyde for at en kontrakt kan inneholde flere polynomer, og dermed flere parametere. Jeg tilnærmer meg problemet ved å teoretisere at alle kontrakter i prinsippet kan bestå av alle polynomene, deretter bruker jeg indikatorfunksjoner til å sortere ut hvilke polynomer som faktisk inngår i kontraktene. Indikatorfunksjonene defineres på følgende måte

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } t_j \in (T_i^s, T_i^e] \\ 0 & \text{hvis } t_j \notin (T_i^s, T_i^e] \end{cases}$$

Her vil  $I_{ij}$  returnere verdien 1 hvis polynom  $j$  er definert over leveringsperioden til kontrakt  $i$  (representert ved intervallet  $(T_i^s, T_i^e]$ ) og verdien 0 hvis dette ikke holder. Kontraktens leveringsperiode må skrives på denne måten for å unngå å inkludere polynomer som kun er definert over kontraktens leveringsperiode i punktet  $T_i^s$ . Nå som dette er gjort kan betingelsen i (32) uttrykkes som den lineære matriselikningen

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{x} = \mathbf{b}_3$$

hvor matrisen  $\mathbf{A}_3$  har dimensjon  $m \times 5n$  og er på formen

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} I_{11}\mathbf{v}_1 & I_{12}\mathbf{v}_2 & \cdots & I_{1n}\mathbf{v}_n \\ I_{21}\mathbf{v}_1 & I_{22}\mathbf{v}_2 & \cdots & I_{2n}\mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{m1}\mathbf{v}_1 & I_{m2}\mathbf{v}_2 & \cdots & I_{mn}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad \mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\delta_j^5 & \frac{1}{4}\delta_j^4 & \frac{1}{3}\delta_j^3 & \frac{1}{2}\delta_j^2 & \delta_j \end{bmatrix}$$

$$\text{hvor } \delta_j^l = \frac{t_j^l - t_{j-1}^l}{t_j - t_{j-1}} \quad \text{for } j = 1, \dots, n \quad \text{og } l = 1, \dots, 5$$

og  $\mathbf{b}_3$  er en kolonnevektor med  $m$  rader på formen

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

$$\text{hvor } c_i = F_i^C(T_i^s, T_i^e) - \frac{1}{T_i^e - T_i^s} \int_{T_i^s}^{T_i^e} s(t) dt \quad \text{for } i = 1, \dots, m$$

Nå som jeg har gjort rede for objektfunksjonen og alle betingelsene på matriseform, kan jeg sette opp hele optimeringsproblemet på sin mest kompakte form

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^{tr} \mathbf{H} \mathbf{x} \quad \text{gitt} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

hvor matrisen  $\mathbf{A}$  har dimensjon  $(3(n-1) + 1 + m) \times 5n$  og er på formen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}$$

og  $\mathbf{b}$  er en kolonnevektor med  $(3(n-1) + 1 + m)$  rader på formen

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ b_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$$

For å løse problemet tilordnes bibetingelsene Lagrange-multiplikatorer gjennom

en kolonnevektor  $\boldsymbol{\lambda}$  med  $(3(n-1) + 1 + m)$  rader på formen

$$\boldsymbol{\lambda}^{tr} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_{3(n-1)+1+m} \end{bmatrix}$$

Lagrange-funksjonen for optimeringsproblemet uttrykkes med

$$L = \mathbf{x}^{tr} \mathbf{H} \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^{tr} [\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}]$$

Ved å minimere Lagrange-funksjonen med hensyn på  $\mathbf{x}$  og  $\boldsymbol{\lambda}$  ender man opp med førsteordensbetingelsene

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{H} & \mathbf{A}^{tr} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Likningssystemet i relasjon (33) består av  $(8n - 2 + m)$  likninger og like mange ukjente.<sup>19</sup>

Sett at systemet i (33) har løsning  $\mathbf{x}^*$  og  $\boldsymbol{\lambda}^*$ . Av disse skal jeg kun benytte meg av parameterverdiene  $\mathbf{x}^*$ . For å uttrykke forwardkurven definerer jeg en matrise  $\mathbf{T}$  med dimensjon  $5n \times 5n$  på formen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boldsymbol{\tau}_n \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad \boldsymbol{\tau}_j = \begin{bmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Videre definerer jeg en rekkevektor  $\mathbf{z}$  med  $5n$  kolonner på formen

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \cdots & \mathbf{z}_n \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad \mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} I_j & I_j & I_j & I_j & I_j \end{bmatrix}$$

hvor

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{hvis } t \in [t_{j-1}, t_j) \\ 0 & \text{hvis } t \notin [t_{j-1}, t_j) \end{cases} \quad \text{for } j = 1, \dots, n-1$$

og

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{hvis } t \in [t_{j-1}, t_j] \\ 0 & \text{hvis } t \notin [t_{j-1}, t_j] \end{cases} \quad \text{for } j = n$$

---

<sup>19</sup>Det viser seg at likningssystemet er lineært avhengig hvis overlappende kontrakter inngår i matrisen  $\mathbf{A}_3$ . Jeg kommer tilbake til dette.

er indikatorfunksjoner som styrer at korrekte parameterverdier legges til grunn for de definerte verdiene av  $t$ . Med definisjonene for  $\mathbf{T}$  og  $\mathbf{z}$  kan jeg nå uttrykke tilpasningsfunksjonen med minimert total kurvatur som  $\varepsilon^*(t) = \mathbf{z}^T \mathbf{T} \mathbf{x}^*$ , og den tilhørende forwardkurven som

$$f^*(t) = s(t) + \varepsilon^*(t) \quad \text{for } t \in [t_0, t_n] \quad (35)$$

### 3.2.3 Eksempel glatt forwardkurve

I Tabell 5 på side 37 har jeg listet sluttpriser og leveringsperioder for alle forwardkontraktene skrevet på systemprisen som var tilgjengelig for handel den 8. august 2011. Alle kontraktene har navn som begynner på "ENO" som står for "Energy Nordic", noe som forteller at den underliggende prisen for kontrakten er den nordiske systemprisen. Etter ENO er leveringsperioden beskrevet. For døgnkontrakter står det "D" for "Day" etterfulgt av leveringsdøgnet på datoform. For ukeskontrakter står det "W" for "Week" etterfulgt av leveringsuke i form av et uke- og årsnummer. For månedskontrakter står det "M" for "Month" etterfulgt av leveringsmåned i form av de tre første bokstavene i navnet på måneden og årsnummer. For kvartalskontrakter står det "Q" for "Quarter" etterfulgt av leveringskvartal i form av kvartal- og årsnummer. For årskontrakter står det "YR" for "Year" etterfulgt av leveringsår i form av årsnummer.

Leveringsdagene forstås som dager frem i tid fra 8. august 2011 og regnes fra begynnelsen av leveringsperioden. Den nærmeste kontrakten ENOD0908-11 har levering fra 9. august 2011 fra kl. 00:00 til 10. august 2011 kl. 00:00. Derfor får denne kontrakten  $T^s = 1$  og  $T^e = 2$ . Den 8. august 2011 noterte børsen sluttprisen 34 €/MWh for ENOD0908-11, derfor er  $F^C(9, 10) = 34$ . Av de 32 kontraktene som er listet har 24 av dem leveringsperiode i 2011 eller 2012. Informasjonsgrunnlaget er følgelig best for disse årene. Når man kommer lengre ut på kurven er det listet færre og lengre kontrakter. Jo lengre leveringsperiode en kontrakt har jo mindre informasjon om sesongvariasjon i systemprisen får man ut av kontraktprisen. Årene 2014 til 2016 har bare en årskontrakt hver. Prisene i disse kontraktene sier ingenting om hvordan systemprisen forventes å svinge over året.

Jeg har programmert modellen i seksjon 3.2.2 i *Mathematica* til å returnere  $f^*(t)$  for et hvilket som helst datasett på formen som i Tabell 5.<sup>20</sup> Det viser seg

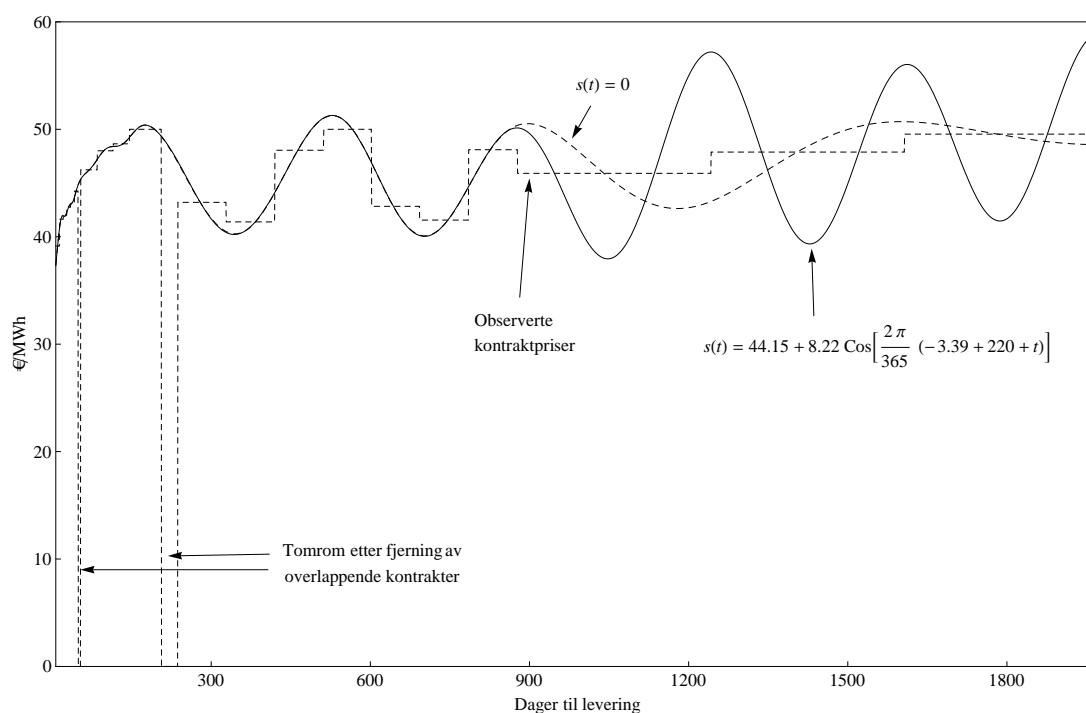
---

<sup>20</sup>Koden er såpass lang og lite intuitiv at jeg unnlater å legge den ved her. Koden med kommentarer tilgjengeliggjøres ved forespørsel til [h.endresen@gmail.com](mailto:h.endresen@gmail.com)

Kontrakt	$T_i^s$	$T_i^e$	$F_i^C(T_i^s, T_i^e)$
ENOD0908-11	1	2	34
ENOD1008-11	2	3	34
ENOD1108-11	3	4	36
ENOD1208-11	4	5	36
ENOD1308-11	5	6	34
ENOD1408-11	6	7	34
ENOW33-11	7	14	39,1
ENOW34-11	14	21	41,6
ENOW35-11	21	28	42
ENOW36-11	28	35	42,8
ENOW37-11	35	42	43,3
ENOW38-11	42	49	44,3
ENOMSEP-11	24	54	43,4
ENOMOCT-11	54	85	46,2
ENOMNOV-11	85	115	48
ENOMDEC-11	115	146	48,7
ENOMJAN-12	146	177	50
ENOMFEB-12	177	206	50
ENOQ4-11	54	146	47,7
ENOQ1-12	146	237	48,8
ENOQ2-12	237	328	43,2
ENOQ3-12	328	420	41,4
ENOQ4-12	420	512	48,1
ENOQ1-13	512	602	50
ENOQ2-13	602	693	42,8
ENOQ3-13	693	785	41,6
ENOQ4-13	785	877	48,1
ENOYR-12	146	512	45,3
ENOYR-13	512	877	45,6
ENOYR-14	877	1242	45,9
ENOYR-15	1242	1607	47,9
ENOYR-16	1607	1973	49,6

Tabell 5: Forwardkontrakter observert den 8. august 2011

at kontrakter med overlappende leveringsperioder gjør matriselikningen  $\mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$  inkonsistent. For å omgå dette problemet er man nødt til å ekskludere overlappende kontrakter fra datasettet slik at hver hvert polynom tilhører høyst en kontrakt. I datasettet som legges til grunn for de kurvene i Figur 2 på side 38 har jeg ekskludert kontraktene ENOMSEP-11, ENOQ4-11, ENOQ1-12, ENOYR-12 og ENOYR-13, da de overlapper andre kontrakter. Kontrakten for 4. kvartal og de to årskontraktene



Figur 2: To glatte forwardkurver med forskjellig sesongfunksjon

overlappes fullstendig av andre kontrakter med mindre tidsoppløsning. Fjerning av kontrakten for september og andre kvartal 2012 etterlater seg to subintervaller i datasettet hvor de gjeldende polynomene kun forholder seg til betingelsene i (30). Dette ser ikke ut til å være et problem siden intervallene uten markedsdata er relativt korte. Jeg har også utelatt alle døgkontraktene fordi disse kontraktene allerede viser tilstrekkelig kort tidsoppløsning.

De to forwardkurvene er konstruert fra samme datasett men med forskjellig uttrykk for sesongfunksjon  $s(t)$ . Den striplede kurven har ikke sesongfunksjon ( $s(t) = 0$ ) mens den heltrukkede kurven bruker funksjonen

$$s(t) = 44,15 + 8,22 \cos \left[ \frac{2\pi}{365} (-3,29 + 220 + t) \right]$$

Denne funksjonen fant jeg ved å tilpasse funksjonen  $s(t) = a + b \cos \left[ \frac{2\pi}{365} (c + t) \right]$  til observasjoner av daglige systempriser for 2009 og 2010. Metoden jeg brukte var "Ikke-Lineær Minste Kvadraters Metode". Parameterverdiene jeg fikk ut var  $a = 44,15$ ,  $b = 8,22$  og  $c = -3,29$ . Verdien 220 i  $(-3,29 + 220 + t)$  har jeg måttet legge på selv for at perioden skal bli korrekt, ettersom min kurve begynner den 8. august 2011 som er dag nummer 220. Jeg presiserer at denne funksjonen blir lagt til grunn for å



vise effekten av forskjellige sesongfunksjoner, ikke fordi jeg mener den representerer en god sesongfunksjon. Både 2009 og 2010 var begge år med svært høye vinterpriser og alle ekstremverdier er tatt med i beregningene, noe som kommer til syne i parameterverdien  $b = 8,22$ , og sesongfunksjonen vil trolig overestimere sesongvariasjonene vesentlig.

Den strippede ”bokslignende” kurven representerer kontraktene som legges til grunn. Det er to glipper i denne kurven og disse indikerer tomrommet de ekskluderte kontraktene etterlatte seg. Jeg presiserer at disse intervallene skal forstås som at det ikke er observasjoner i intervallene, ikke at prisen faller til 0. Av figuren kan man se at de to forwardkurvene ligger oppå hverandre frem til rundt dag 900. Her dominerer effekten av tilpasningsfunksjonen over effekten av sesongfunksjonen. Fra og med dag 877 og ut er det kun tre årskontrakter som observeres. I dette området har sesongfunksjonen veldig mye å si, noe som fremkommer tydelig av figuren. Kurven som ikke har sesongfunksjon viser lavere priser vinteren 2014/2015 enn i juli 2014, noe som gir svært lite mening. Kurven med sesongfunksjon viser i det minste et sesongmønster i tråd med hva en kunne forvente, selv om variasjonen virker noe overdrevet. De første 200 dagene har desidert flest kontrakter. Her er mønsteret noe annerledes enn lengre ut i kurven. Dette kan være et tegn på at det sanne sesongmønsteret egentlig er litt mer ”firkantet”, med likere vinterpriser og likere sommerpriser og heller en relativt brattere nivåendring mellom de to sesongene. Skjønt, det kan også være at denne perioden forventes å være spesiell i forhold til normalen.

### 3.3 Uke- og døgnvariasjon

Med en velfundert sesongfunksjon fanger den glatte forwardkurven forhåpentligvis opp den underliggende kraftprisens normale sesongvariasjon på en akseptabel måte. Kurven fanger imidlertid ikke opp døgn- og ukevariasjon i prisene (ukekontrakter er korteste underliggende kontrakt). Døgnpriser har en tendens til å være høyere på ukedager enn i helger, og timepriser har en tendens til å være lavere på nattestid enn på dagtid. Denne seksjonen ser på mulighetene for å utvide kurven til også å hensynta slike prisvariasjoner.<sup>21</sup>

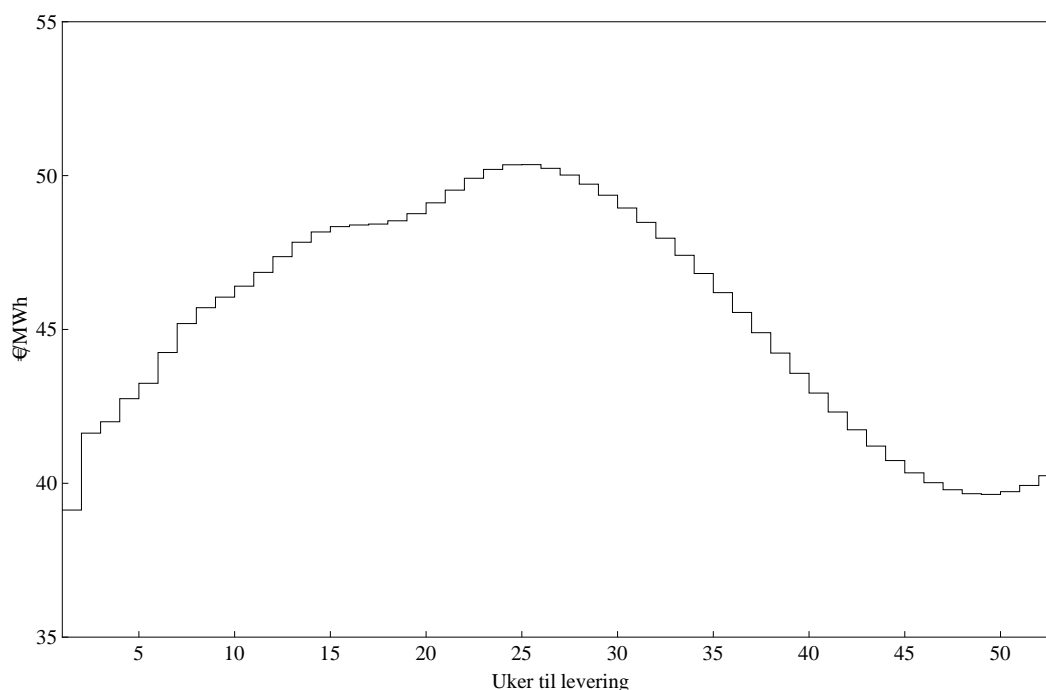
Ved å integrere den glatte forwardkurven kan jeg finne teoretiske priser på enhver

---

<sup>21</sup>Ideen om å legge på mønstre på den glatte forwardkurven fikk jeg fra et forelesningsnotat fra ”Kraftanalytiker-studiet” som holdes på NHH. Forelesningen ble holdt 10. september 2010 av Gunnar Stensland. Jeg fikk notatet av en som deltok på forelesningen.

termin som ikke er kortere enn en uke. Ved å begynne i den første mandagen (dag 7) integrerer jeg kurven over intervaller på 7 dager og dividerer de bestemte integralene på 7 for å få teoretiske gjennomsnittlige ukespriser. Hver ukepris listes 7 ganger på rad slik at jeg får en liste som er mottagelig for å bli påført et ukedagsmønster. Jeg hentet ut 280 ukespriser fra kurven så listen inneholder derfor  $7 \cdot 280 = 1960$  elementer

$$p^{uke} = \{\{p_i^{uke}\}_{j=1}^7\}_{i=1}^{280} \quad \text{hvor} \quad p_i^{uke} = \frac{1}{7} \int_{7i}^{7i+7} f^*(t) dt$$



Figur 3: Estimerte ukespriser for de første 53 ukene

Figur 3 viser ukespriser for de første 53 ukene fra dag 7 i datasettet (ca. august 2011 til august 2012). Her kan man se at sesongvariasjonen fra den glatte forward-kurven bevares på en god måte.

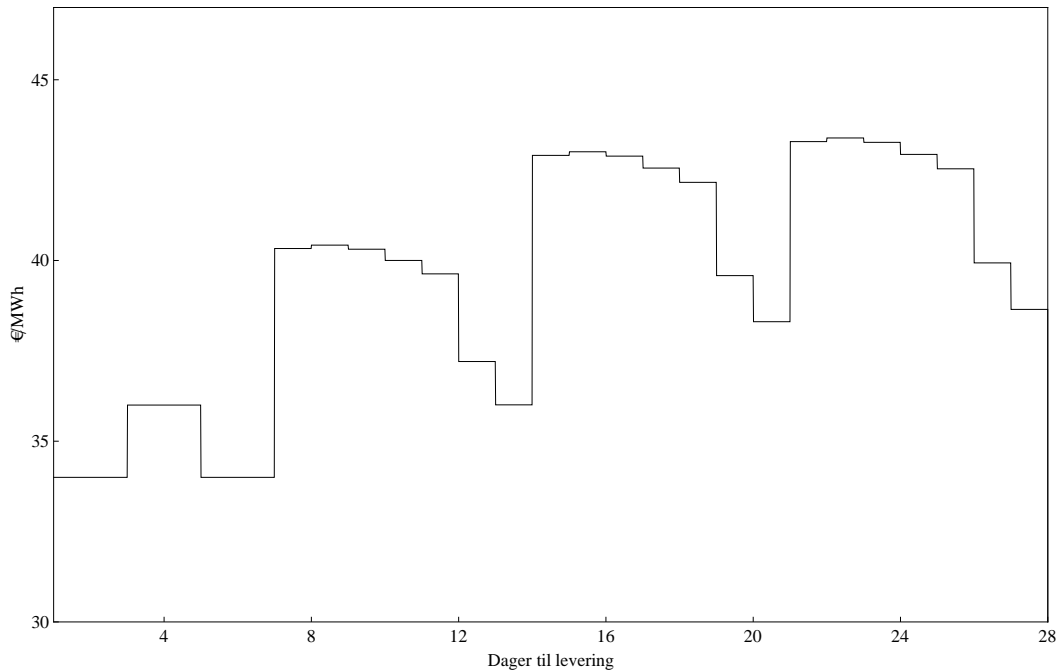
På ukesprisene legger jeg på et ukedagsmønster for å få en kurve med døgnpriser som fanger opp prisvariasjon over uken. For å beregne et godt ukedagsmønster bør man nok gjennomføre en større økonometrisk analyse. Min hensikt er å introdusere konseptet og jeg nøyer meg derfor med å presentere et eksempel hvor jeg har brukt et enkelt gjennomsnittsbasert mønster basert på daglige systempriser fra 2009 og 2010

La  $p_1^d, \dots, p_{n^d}^d$  være  $n^d$  observasjoner av prisen på ukedag  $d$ . Jeg definerer ukedagsfaktoren til ukedag  $d$  som

$$x^d = \frac{\frac{1}{n^d} \sum_{i=1}^{n^d} p_i^d}{\frac{1}{7n^d} \sum_{d=1}^7 \sum_{i=1}^{n^d} p_i^d} \quad d = \text{man}, \dots, \text{søn}$$

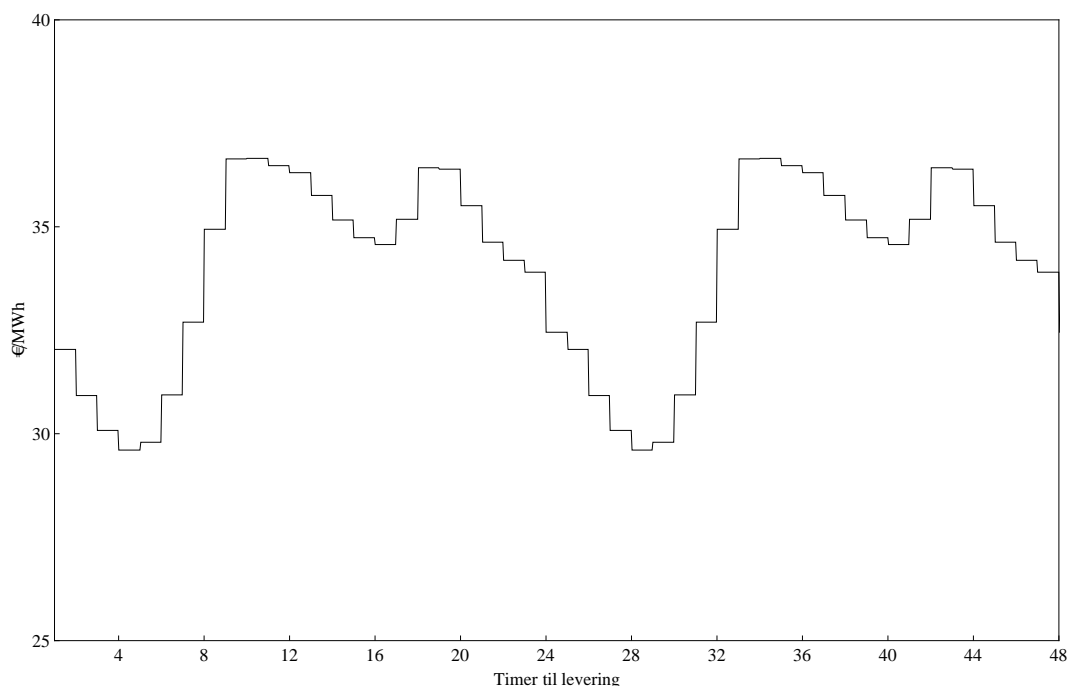
$x^d$  måler da gjennomsnittsprisen på ukedag  $d$  i forhold til gjennomsnittsprisen for uken. Jeg lager så en ny liste som repeterer ukesmønsteret 280 ganger slik at jeg også her får en liste med 1960 elementer

$$x^{uke} = \{\{x^{man}, \dots, x^{søn}\}\}_{i=1}^{280}$$



Figur 4: Estimerte ukedagspriser for de første 34 dagene

Tilslutt multipliserer jeg hvert element i listen  $p^{uke}$  med tilsvarende element i listen  $x^{uke}$  slik at jeg får en liste med 1960 døgnpriser som hensyntar prisvariasjon innenfor uken. Videre, for å få døgnpriser fra og med dag 1 føyer jeg på prisene fra de 6 døgnkontraktene i Tabell 5 på side 37 slik at listen viser 1966 døgnpriser fra 1 til 1966 dager til levering. De  $(6 + 3 \cdot 7) = 34$  første dagene i listen illustreres i Figur 4. Av figuren kan man se at de 6 første dagene (døgnkontraktene) har et litt annet mønster enn de neste tre ukene (kalkulerte døgnpriser). De to første døgnkontraktene (tirsdag og onsdag) er priset likt som (lørdag og søndag). Kontraktene



Figur 5: Estimerte timepriser for de første 48 timene

for torsdag og fredag har pris 36 €/MWh som er 2 €/MWh høyere enn de andre døgnkontraktene. Hva dette kan komme av er ikke godt å si. En mulig forklaring er at det er bedre informasjon (værmeldinger) for de første dagene. De kalkulerter døgnprisene fra dag 7 til 34 baserer seg på ukedagsmønsteret. Man kan se at prisene for mandag til torsdag er omtrent like mens fredag er litt lavere. Prisen for lørdag er lavere enn for fredag og prisen for søndag er den laveste.

Neste steg er å konstruere timepriser fra listen med døgnpriser. Jeg lager først en liste med  $24 \cdot 1966$  elementer hvor hver døgnpris (1966 stykker) er listet 24 ganger

$$p^{dag} = \left\{ \{p_i^{dag}\}_{j=1}^{24} \right\}_{i=1}^{1966}$$

For å lage et godt timeprismønster bør man nok utføre en større økonometrisk analyse. For å kunne illustrere et eksempel skal jeg nøye meg med å bruke et enkelt gjennomsnittsbasert mønster basert på time-systempriser fra 2009 og 2010

La  $p_1^h, \dots, p_m^h$  være  $m$  observasjoner av prisen i time  $h$ . Jeg definerer timefaktoren til time  $h$

$$x^h = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i^h}{\frac{1}{24m} \sum_{h=1}^{24} \sum_{i=1}^m p_i^h} \quad \text{for } h = 1, 2, \dots, 24$$

$x^h$  måler da gjennomsnittsprisen på time  $h$  i forhold til gjennomsnittsprisen for døgnet. Jeg lager så en ny liste som repeterer timesmønsteret 1966 ganger slik at jeg også her får en liste med  $24 \cdot 1966$  elementer

$$x^{dag} = \left\{ \left\{ x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{24} \right\} \right\}_{i=1}^{1966}$$

Tilslutt multipliserer jeg hvert element i listen  $p^{dag}$  med tilsvarende element i listen  $x^{dag}$  slik at jeg får en liste med  $24 \cdot 1966$  timepriser som hensyntar prisvariasjon mellom ukedager og over døgnet. De 48 første timene fra listen er illustrert i Figur 5. Av figuren kan man se at prisene er lavere nå nattestid og høyest på dagtid, slik man kunne forvente.

Jeg har nå en prisserie på timeform nesten 6 år frem i tid, som hensyntar sesong-, uke- og døgnvariasjon.

### 3.4 Innvendinger mot metoden

#### Systemprisen er ikke korrekt kraftpris

Den glatte forwardkurven er konstruert på grunnlag av observerte systempris-

Kontrakt	$T_i^s$	$T_i^e$	$D_i^C(T_i^s, T_i^e)$
SYOSLSEP-11	24	54	-0,25
SYOSLOCT-11	54	85	0
SYOSLQ4-11	54	146	-0,63
SYOSLQ1-12	146	237	0
SYOSLQ2-12	237	328	0
SYOSLYR-12	146	512	0
SYOSLYR-13	512	877	0
SYOSLYR-14	877	1242	0

Tabell 6: Cfd-kontrakter for Oslo (NO1) observert den 8. august 2011

kontrakter i ekemplerne jeg har presentert. Systemprisen er en teoretisk pris som ikke tjener en betalingsfunksjon i det fysiske markedet. For å lage en kurve som baserer seg på områdepris må man inkludere Cfd-kontrakter i beregningene. Problemet med dette er at det listes er færre terminer for Cfd-kontraktene enn for de systempris-baserte forwardkontraktene. Videre er mange av Cfdene svært lite omsatt på børs (særlig de med norske områdepriser). Tabell 6 lister Cfd-kontraktene for Oslo som var tilgjengelige for handel den 8. august 2011. Her representerer  $D_i^C(T_i^s, T_i^e)$  sluttprisen

på en Cfd-kontrakt med levering i  $[T_i^s, T_i^e]$ . Av alle kontraktene i tabellen var det kun SYSOSLQ4-11 som mottok bud denne dagen og det var ingen handel. Sluttprisene er derfor blitt kalkulert av børsen med forsøk å sette en "fair" pris. En ting man kan merke deg er at prisene indikerer om små differanser mellom Osloprisen og systemprisen for alle terminer. Hvis system- og områdeprisene er nesten alltid like kan kanskje systempriskontraktene allikevel brukes alene uten at det gir for store feil. Dette ser imidlertid ikke ut til å være oppfylt for Oslo-Cfden. Den 25. september 2011 endte SYOSLOCT-11 med sluttpris -7,5 €/MWh. Med så store prisdifferanser mellom områdepris og systempris kan det fort bli dyrt å kun basere seg på en systempriskurve i driftsplanleggingen.

Hvis man skal lage en glatt forwardkurve for en områdepris  $O$  må man ha observasjoner av både Cfd- og forwardkontrakter for samme termin slik at alle observasjoner som legges til grunn tilfredsstiller

$$O_i^C(T_i^s, T_i^e) = D_i^C(T_i^s, T_i^e) + F_i^C(T_i^s, T_i^e)$$

hvor både  $D_i^C$  og  $F_i^C$  er listet for handel. I Tabell 7 har jeg gjengitt "kontraktene"<sup>22</sup> for Oslo som kunne observeres den 8. august 2011. Siden antall observasjoner er begrenset av det lave antallet Cfd-kontrakter er informasjonsgrunnlaget mye tynnere. På toppen av dette må man fjerne OSLYR-12 og enten OSLOCT-11 eller OSLQ4-11 for å unngå problemer med overlappende kontrakter. Antall kontrakter som kan legges til grunn for kurven blir da 6 kontrakter, et ganske tynt grunnlag med andre ord.

Ukedags- og timemønstrene bør også utledes fra områdeprisedata. Å basere seg på historiske data er i seg selv en mulig feilkilde siden fremtiden ikke trenger å bli som fortiden. Effekter av strukturelle endringer som opprettelse av nye prisområder, endrede grenser i eksisterende områder eller en varig økning i handelskapasitet er bare noen eksempler på forhold som ikke vil bli fanget opp av historiske mønstre. Videre er trolig metoden jeg har brukt for å lage mønstre for enkel. Fremgangsmåten antar at man kan forvente at prisvariasjonene over uken og døgnet er de samme uavhengig av tid på året. Det er trolig relativt høyere prisvariasjon over døgnet de kaldeste månedene når systemet nærmer seg kapasitetsgrensen, eller når snøsmeltingen inntreffer og man kan få kjørepres ved mange vannkraftverk samtidig.

---

<sup>22</sup>Dette er syntetiske kontrakter som ikke listes direkte. Kontraktnavnene har jeg funnet opp selv.

Kontrakt	$T_i^s$	$T_i^e$	$O_i^C(T_i^s, T_i^e)$
OSLSEP-11	24	54	43,15
OSLOCT-11	54	85	46,2
OSLQ4-11	54	146	47,07
OSLQ1-12	146	237	43,2
OSLQ2-12	237	328	41,4
OSLYR-12	146	512	45,3
OSLYR-13	512	877	45,6
OSLYR-14	877	1242	45,9

Tabell 7: Forwardpriser for Oslo (NO1) observert den 8. august 2011

Kanskje bør man også inkludere andre mål som områdespesifikke fyllingsgrader for å anslå mønsteret for inneværende år. Det er kanskje forskjellig variasjon over døgnet i et våtår enn i et tørrår.

### Representerer forwardprisene virkelig forventede priser?

Mange av terminene som er tilgjengelig for handel omsettes i veldig liten grad. Av kontraktene listet i Tabell 5 forekommer mesteparten av omsetningen i kontraktene for den nærmeste måneden, kvartalet og året. I mindre likvide kontrakter kan det være 1 €/MW mellom beste kjøper og selger, noe som skaper usikkerhet rundt hvor markedsprisen egentlig er. I enkelte kontrakter kan det gå flere dager mellom hvert bud. Sluttpreisene i illikvide kontrakter må ofte kalkuleres av børsen. Selvom dette gjøres etter beste evne kan man ikke utelukke at det disse prisene kan avvike fra faktisk pris.

Hvis antagelsen om at godt informerte aktører dominerer prisdannelsen ikke holdes mål, slik at prisene i det finansielle markedet ikke reflekterer forventet gjennomsnittspris vil kurven være uegnet til planlegging.

### Den kalkulerte kurven er en av uendelig mange arbitrasjefrie kurver

Betingelsene som ble pålagt forwardkurven ble gjort for å kunne velge ut en eksplisitt kurve. Det ville være utrolig hvis metoden velger en kurve av uendelig mange mulige som faktisk samsvarer med prisforventningene i markedet. Kravet om at kurven skal være glatt gjør kurven syklisk til normale observasjoner av kontraktpriiser. Selvom dette gir et mønster som samsvarer med hva en kunne forvente kan syklene fortsatt være feil. Som nevnt i forbindelse med figur 2 kan det hende det typiske mønsteret egentlig er litt mer ”boksformet” slik at toppene blir for høye, bunnene for lave og endringen mellom de to nivåene for lite bratt. Hvis det hadde vært listet flere

kontrakter med korte leveringsperioder som ukes- og månedskontrakter ville det kunne økt tillitten til metoden.

## 4 Konklusjon

Jeg sett nærmere på hvordan en produsent som disponerer et regulerbart vannkraftverk med lineær produksjonsteknologi og begrenset produksjons- og magasin-kapasitet, kan bruke en modell til å verdsette tilgjengelig kapasitet og utlede tilbudsfunksjoner. Jeg finner for visse tilfeller at modellen ikke returnerer entydige løsninger for modellens skyggepriser og at man da må argumentere for korrekt vannverdi utifa et planleggingsperspektiv. En slik nyanse er viktig å kjenne til hvis man skal bruke modellen i praksis. Med mindre en datamaskin blir fortalt hvilken skyggepris som skal velges i situasjoner hvor det er flere mulige allokeringer for skyggeprisene, vil datamaskinen ofte ende opp med å velge "feil". Tilgjengelig produksjonskapasitet kan verdsettes for modellens første time ved å justere det tilgjengelige vannet som legges til grunn når modellen kjøres. Fra vannverdiene tilhørende hver enhet vann som kan tappes kan man så utlede en tilbudsfunksjon. Jeg sitter igjen med et inntrykk at vannkraftprodusentenes største utfordring i forbindelse med å verdsette sin produksjonskapasitet ikke er hvordan modellen skal se ut, men hvordan man skal få tak i informasjonen modellen trenger. Den høye andelen regulerbar vannkraft i Norge gjør det trolig ekstra viktig å ha gjennomsiktighet rundt prisdannelsen, da det kan virke som at vannkraftprodusentene er avhengige av å modellere systemet for å frembringe prisanslag som er forenelige med effektiv ressursutnyttelse.

Jeg har utforsket en metode for å konstruere timepriser som hensyntar prisvariasjoner over sesong, uke og døgn fra offentlig tilgjengelige markedsdata. Jeg finner at denne metoden trolig ikke lar seg gjennomføre på en god måte fordi det listes relativt få Cfd-kontrakter, og disse handles ikke i særlig stor grad. Metoden virker bedre når kun systemprisbaserte forwardkontrakter legges til grunn fordi det er flere i antall. Dette kan imidlertid være risikabelt ettersom systemprisen kan variere vesentlig fra områdepriser i perioder.



## 5 Vedlegg

(\*Inndata\*)

$R_0=25$ ;

magasinkapasitet=80;

slukekapasitet=10;

a=1;

tilsigsserie={1,1,1,1,1,1,0,50,50,25,5,1,1,1,1,1,0,0,0};

prisserie={32,31,30,31,39,34,29,19,20,22,30,37,32,10,34,43,42,41,40,39};

(\*Her begynner programmet\*)

T= Length[prisserie];

w=Plus[Table [If [i == 1,  $R_0$ , 0] , {i, T}] , tilsigsserie] ;

$\bar{r}$  = Table[slukekapasitet, {T}];  $\bar{R}$  = Table[magasinkapasitet, {T}];

null = Table[0, {i, T}];

A = Table[If[j == T + i - 1 && j ≥ T + 1 && i ≤ T, -1, 0] + If[i == j && i ≤ T, 1, 0] + If[i == T + j, 1, 0] + If[j == T + i, 1, 0], {i, 3T}, {j, 2T}];

c = Join[Times[a, prisserie], null];

b = Join [w,  $\bar{r}$ ,  $\bar{R}$ ] ;

løsning = Flatten[N[`DualLinearProgramming`[-c, -A, -b]]];

$r^*$  = Table[Part[løsning, i], {i, 1, T, 1}]

$e^*$  = Times [ $r^*$ , a] ;

$R^*$  = Table[Part[løsning, i], {i, T + 1, 2T, 1}]

$\lambda^*$  = Table[Part[løsning, i], {i, 2T + 1, 3T, 1}]

$\theta^*$  = Table[Part[løsning, i], {i, 3T + 1, 4T, 1}]

$\gamma^*$  = Table[Part[løsning, i], {i, 4T + 1, 5T, 1}]

profitt = Dot [prisserie,  $e^*$ ]

## Referanser

Bent, F. E., J. Saltyte-Benth, and S. Koekebakker (2008). *Stochastic Modelling of Electricity and Related Markets*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Førsund, F. R. (2007). *Hydropower Economics*. Springer Science+Business Media, LLC.

Sydsæter, K., A. Seierstad, and A. Strøm (2002). *Matematisk Analyse Bind 2*. Gyldendal Akademisk.